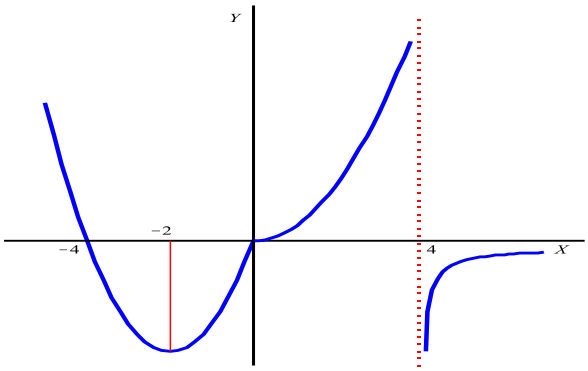
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo Semestre 2014

MAT 1610 - CACULO I-I3

1. **Sea f función continua en $\mathbb{R}$ con $f(0) = 1$. El siguiente es el gráfico de $f'(x)$. Esboce el gráfico de f indicando intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos donde se alcanzan los valores extremos, sentido de concavidad y puntos de inflexión.**

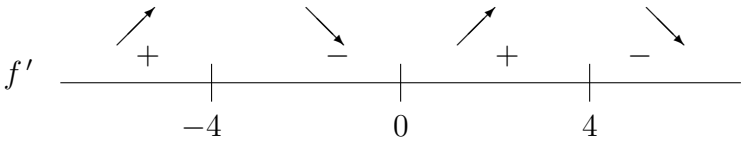


Solución:

***a*) Del gráfico de $f'(x)$ se obtiene que**

$$f'(0) = 0 \quad , \quad f'(-4) = 0 \quad \textbf{y no existe} \quad f'(4).$$

Considerando los cambios de signo de $f'(x)$, se tiene:



Se tiene:

- **$f'(x)$ cambia de $+$ a $-$ en $x = -4$, luego $x = -4$ hay un máximo relativo.X**
  (0.4 pts)
- **$f'(x)$ cambia de $-$ a $+$ en $x = 0$, luego $x = 0$ hay un mínimo relativo.**
  (0.4 pts)

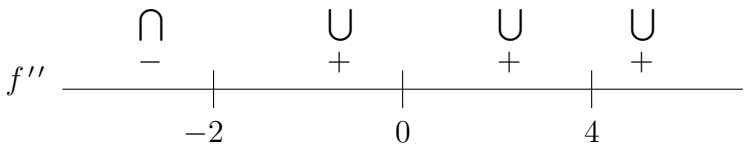
- **Además $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$ en $x = 4$, luego $x = 4$ hay un máximo relativo.**

  (0.4 pts)

- **$f(x)$ es creciente en $]-\infty\,,\,4[\cup]0\,,\,4[$, pues $f'(x) > 0$ y es decreciente en $]-4\,,\,0[\cup]4\,,\,+\infty[$, pues $f'(x) < 0$.**

  (1.2 pts)

***b*) Analizando $f''(x) = (f')'(x)$, de acuerdo a la gráfica de $f'(x)$, se tiene:**



- **$f(x)'$ es decreciente en $]-\infty\,,\,-2[$, luego $f''(x) < 0$, por lo tanto la función es cóncava hacia abajo en este intervalo.**

  (0.6 pts)

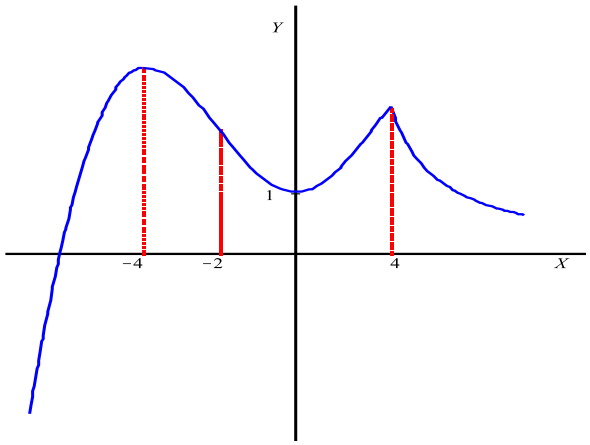
- **$f(x)'$ es creciente en $]-2\,,\,0[\cup]0\,,\,4[\cup]4\,,\,-\infty[$, luego $f''(x) > 0$, por lo tanto la función es cóncava hacia arriba en estos intervalos.**

  (0.6 pts)

- **$f(x)'' = 0$ en $x = -2$ y cambia de signo en este punto, luego $(-2\,,\,f(-2))$ es un punto de inflexión.**

  (1,2 pts)

***c*) La gráfica de $f(x)$ es, por lo tanto:**



(1.2 pts)

2. a) Calcule el siguiente límite identificándolo como una suma de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{2n-1}{n}}\Big)$$

Solución.

Tenemos que:

$$\frac{1}{n}\Big(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{2n-1}{n}}\Big)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2k-1}{n}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\sqrt{\left(\frac{2k-1}{2}\right)\left(\frac{2}{n}\right)}$$

(0.5 pts)

y corresponde la suma de Riemann de $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0,2]$ considerando la partición

$$P_n = \left\{0, \frac{2}{n}, \frac{2\cdot 2}{n}, \frac{2\cdot 3}{n}, \ldots, \frac{2\cdot(n-1)}{n}, 2\right\}$$

y evaluando $\sqrt{x}$ en el extremo derecho del k-esimo subintervalo.

(1.5 pts)

Como $\sqrt{x}$ es continua en $[0,2]$, por teorema visto en clases tenemos que

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{2k-1}{2}\right)\left(\frac{2}{n}\right)} = \int_0^2 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}x^{3/2}\Big)\Big|_0^2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

(1.0 pts)

b) Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^2 - \operatorname{sen}^2(\pi t)dt}{x^2\operatorname{sen}(x)}$$

Solución.

Dado que tanto numerador como denominador tienden a cero, entonces utilizando L'Hospital, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^2 - \operatorname{sen}^2(\pi t)dt}{x^2\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2(\pi x)}{2x\operatorname{sen}(x) + x^2\cos(x)}$$

(1.0 pts)

Nuevamente, tanto numerador como denominador, tienden a cero, por lo que utilizamos L'Hospital nuevamente:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x - 2\pi\operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi x)}{2\operatorname{sen}(x) + 4x\cos(x) - x^2\operatorname{sen}(x)} = \frac{2x - \pi\operatorname{sen}(2\pi x)}{2\operatorname{sen}(x) + 4x\cos(x) - x^2\operatorname{sen}(x)}$$

(1.0 pts)

Nuevamente utilizamos L'Hospital y obtenemos:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\pi^2\cos(2\pi x)}{6\cos(x) - 6\operatorname{sen}(x) - x^2\cos(x)} = \frac{1-\pi^2}{3}.$$

(1.0 pts)

3. a) Demuestre que:

$$3 \leq \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx \leq 5$$

Solución.

Dado que:

$$\frac{x^2+5}{x^2+2} = 1 + \frac{3}{x^2+2}$$

Entonces, usando las propiedades de la integral, obtenemos que:

$$\int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx = \int_0^2 dx + 3\int_0^2 \frac{dx}{x^2+2}$$

(0.5 pts)

Pero,

$$\int_0^2 dx = 2$$

(0.5 pts)

entonces acotaremos la segunda integral en el intervalo $[0,2]$.

Como $0 \leq x \leq 2$ **entonces**

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x^2+2} \leq \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{3} \leq \int_0^2 \frac{dx}{x^2+2} \leq 1$$

Luego:

$$1 \leq 3\int_0^2 \frac{dx}{x^2+2} \leq 3$$

Finalmente

$$3 \leq \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx \leq 5$$

(2.0 pts)

OBSERVACIÓN: Podrían hacer otras acotaciones, lo importante es que el procedimiento esté correcto.

b) Sea $f(x)$ **una función continua y positiva, tal que:**

$$\int_0^x f(t)\,dt = e^x + \arctan(x) + a$$

determine a **y** $f(x)$.

Solución.

Derivando la igualdad, obtenemos:

$$f(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2}$$

(1.0 pts)

Por lo tanto al integrar esta función entre 0 **y** x **obtenemos:**

$$\int_0^x e^x + \frac{1}{1+x^2} = e^x + \arctan(x) - 1 - \arctan(0)$$

(1.5 pts)

luego:

$$f(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2} \textbf{ y } a = -1.$$

(0.5 pts)

4. Estudie la monotonía y determine los puntos críticos de la función:

$$f(x) = \frac{4x}{\ln(3x)} - \int_a^{3x} \frac{dt}{\ln(t)}$$

en el intervalo $[a, e^4]$ **con** $1 < a > \dfrac{e^4}{3}$.

Solución.

Derivamos $f(x)$ **para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los valores extremos.**

$$f'(x) = \frac{4\ln(3x) - 4}{(\ln(3x))^2} - \frac{3}{\ln(3x)} = \frac{\ln(3x) - 4}{((3x))^2}$$

(3.0 pts)

Dado que el denominador es siempre positivo, entonces el signo de la primera derivada depende solamente del numerador, es decir:

$f'(x)$ **crece en** $(\dfrac{e^4}{3}, e^4)$ **y decrece en** $(1, \dfrac{e^4}{3})$.

(2.0 pts)

Entonces, los puntos críticos son:

$$\{\frac{e^4}{3},\, a, e^4\}$$

(1.0 pts)