PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 31: Producto interior, longitud y ortogonalidad

1. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Explique por qué $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geqslant 0$. ¿Cuándo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$?

2. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$. Calcule y compare $\mathbf{u} \cdot v$, $\|\mathbf{u}\|^2$, $\|\mathbf{v}\|^2$ y $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$. No utilice el teorema de Pitágoras.

3. Comprueba la ley del paralelogramo para vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2 \, .$$

4. Sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Describa el conjunto H de vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que son ortogonales a $\mathbf{v}$.

5. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$, y W el conjunto de todas las $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$. ¿Qué teorema se puede utilizar para demostrar que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$? Describa a W en lenguaje geométrico.

6. Suponga que un vector $\mathbf{y}$ que es ortogonal a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Demuestre que $\mathbf{y}$ es ortogonal al vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

7. Suponga que $\mathbf{y}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Demuestre que $\mathbf{y}$ es ortogonal a cada $\mathbf{w}$ en $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

8. Sea $W = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$. Demuestre que si $\mathbf{x}$ es ortogonal a cada $\mathbf{v}_j$, para $1 \leqslant j \leqslant p$, entonces $\mathbf{x}$ es ortogonal a todo vector en W.

9. Sean W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, y $W^\perp$ el conjunto de todos los vectores ortogonales a W. Demuestre que $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, considerando los siguientes pasos.

   a) Tome $\mathbf{z}$ en $W^\perp$, y sea $\mathbf{u}$ cualquier elemento de W. Entonces $\mathbf{z} \cdot \mathbf{u} = 0$. Tome cualquier escalar c y demuestre que $c\mathbf{z}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$. (Puesto que $\mathbf{u}$ era un elemento arbitrario de W, esto demostrará que $c\mathbf{z}$ está en $W^\perp$).

   b) Tome $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$ en $W^\perp$, y sea $\mathbf{u}$ cualquier elemento de W. Demuestre que $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$ es ortogonal a $\mathbf{u}$. ¿Qué se puede concluir acerca de $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$? ¿Por qué?

c) Termine la demostración de que $W^{\perp}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

10. Demuestre que si $\mathbf{x}$ está en W y $W^{\perp}$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.