PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Ayudantía 3 - MAT1203

1. En la primera ayudantía, se propuso el siguiente problema:

   "Determine la intersección de los planos $5x - 2y - 2z = 1,\ \ 4x + y + z = 6$"

   Determine la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema asociado a este problema.

   Solución:
   El sistema del enunciado puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

   Así, la matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Y la matriz ampliada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

2. Las siguientes matrices corresponden a las matrices ampliadas de dos sistemas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

   a) Demuestre que los sistemas asociados a cada una de las matrices son sistemas equivalentes.
   b) Para cada matriz, bosqueje el gráfico de la situación descrita por el sistema y verifique, geométricamente, que los sistemas son equivalentes.

   Solución:

Las siguientes matrices corresponden a las matrices ampliadas de dos sistemas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

a) Para ver que los sistemas representados por ambas matrices son equivalentes, lo que debemos hacer es utilizar operaciones fila para convertir una matriz en la otra.

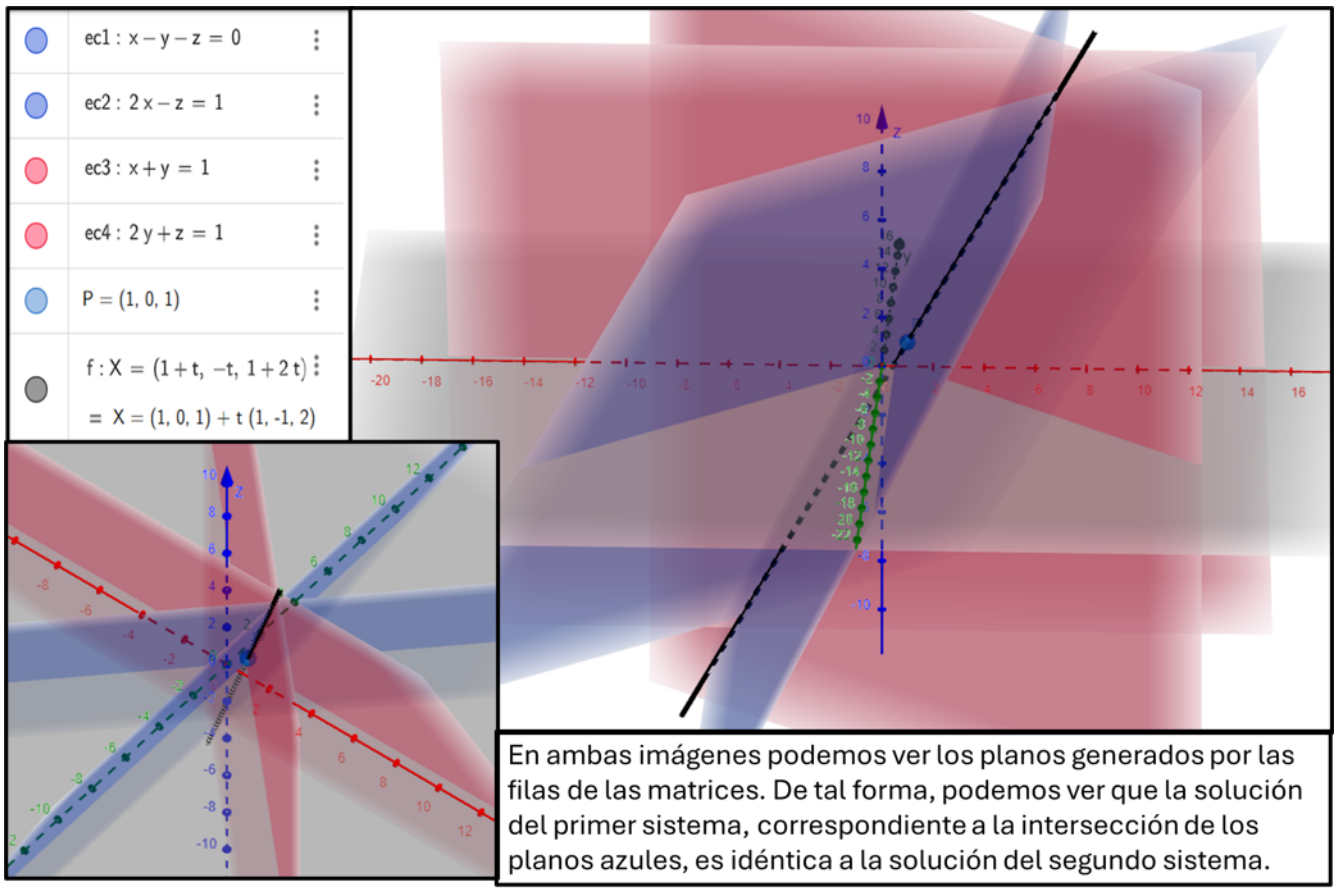
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} f_1 := f_1 \\ f_2 := f_2 - 2f_1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} f_1 := f_1 + f_2 \\ f_2 := f_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Así, como hemos convertido la primera matriz ampliada en la segunda, ambos sistemas son equivalentes (van a tener el mismo conjunto solución)

b)



En ambas imágenes podemos ver los planos generados por las filas de las matrices. De tal forma, podemos ver que la solución del primer sistema, correspondiente a la intersección de los planos azules, es idéntica a la solución del segundo sistema.

3. Aplique operaciones elementales de fila para transformar la siguiente matriz a la forma escalonada y, luego, a la forma escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow 3R_3 + 2R_2, \;\; R_3 \leftarrow \tfrac{1}{2}R_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - 8R_3, \;\; R_2 \leftarrow R_2 - 4R_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 0 & -23 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow \tfrac{1}{3}R_1, \;\; R_2 \leftarrow \tfrac{1}{3}R_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{23}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + \tfrac{7}{3}R_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Sean $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$, vectores de $\mathbb{R}^7$ y considere la matriz $M = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]$.
   Si $M(2e_1 - e_3 + e_4) = 0$:

   a) ¿A qué conjunto pertenecen los vectores canónicos e_i de la expresión anterior?
   Solución: Los vectores canónicos pertenecen a $\mathbb{R}^4$porque la matriz M es de tamaño 7×4 por lo que sólo se puede multiplicar por vectores en $\mathbb{R}^4$.

b) Demuestre que v_4 es combinación lineal de los vectores $v_1,\ v_2$ y v_3.

Solución:

De $M(2e_1 - e_3 + e_4) = 0$ tenemos que $2v_1 - v_3 + v_4 = 0$, despejando tenemos que $v_4 = v_3 - 2v_1$, luego es combinación lineal de dichos vectores.

c) Demuestre que el SEL cuya matriz ampliada es $[v_1\ v_2\ v_4|v_3]$ es consistente. Determine una solución.

Solución:

El sistema $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_4 = v_3$ es consistente. Una solución es $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 1)$.