- Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, entonces $\text{Nul}(A)$ está generado por un vector L.I.

Sol: $\text{Nul}(A) := \{x \mid Ax = 0\}$

$$Ax = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x_1 + 2x_3 = 0$$

$$x_2 - 3x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -2x_3$$

$$x_2 = 3x_3$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{Nul}(A) = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

L.I. $\neq \vec{0}$

□

- Sea A matriz de 4×5. Si $e_1 \in \text{Im}(A)$, entonces el sistema $Ax = e_1$ tiene solución y es única.

Sol: Si $e_1 \in \text{Im}(A)$

$\Rightarrow \exists x \quad Ax = e_1$

$A := [e_1, e_1, e_1, e_1, e_1]$

$Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1$

(Ira col)

$\Rightarrow$ Falso

No tiene porqué ser única.

- Si A es una matriz inyectiva y el sistema $Ax = b$ tiene solución, entonces el sistema $Ax = 2b$ tiene solución y es única.

Sol: $Ax = b$ tiene solución

x^* es la solución

$Ax^* = b \quad / \cdot 2$

$2Ax^* = 2b$

$A(2x^*) = 2b$

$2x^*$ es una solución.

Como A es inyectiva,

$\Rightarrow$ es única.

4. Si A es una matriz inyectiva de 4×3, entonces existe $b \in \mathbb{R}^4$ tal que el sistema $Ax = b$ no tiene solución.

Sol: A tiene 3 col

$\Rightarrow$ máx cant. piv. es 3

$$\dim(\text{Col}(A)) \leq 3 < 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$$

$\Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}^4 \quad b \notin \text{Col}(A) = \text{Im}(A)$

$Ax = b$ no puede tener sol.

- Si A es una matriz tal que $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ y $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, entonces $\text{Im}(A)=\text{Gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $\text{Nul}(A)=\text{Gen}\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right\}$

$\vec{0}$

$\in Nul$

Sol:

$$A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} \quad / \cdot 1/2$$

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

e_2

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$$Col(A)=Gen\left\{\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=Gen\left\{\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$$=Gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$A=\begin{bmatrix}3&-1\\3&-1\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad Nul(A)?$$

$$A x = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow 3x_1 - x_2 = 0$$

$$x_2 = 3x_1$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Nul(A) = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\neq Gen\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow Falso$$

☒

6. Si A es una matriz de 2×3 con filas L.I., entonces los sistemas $Ax = e_1$ y $Ax = e_2$ tienen solución.

Sol A filas LI

Fer(A) tiene 2 pivots

$[A|b] \Rightarrow [Fer(A)|c]$

$\Rightarrow$ Siempre tiene Sol

ya que $\nexists$ fila sin pivote.

$\Rightarrow$ Si $b = e_1$, $b = e_2$

$Ax = b$, tiene Sol.

Ver de devo ∎

7. Una matriz de 3×5 no puede ser inyectiva.

Sol: $A_{3\times 5}$

Si A fuera inyectiva

FER(A) Va a tener tantos pivotes como col

$\Rightarrow$ FER(A) tiene 5 pivotes

A 3 filas

$\Rightarrow \Leftarrow$

A no puede ser inyectiva.

8. Una matriz de 3×5 no puede ser sobreyectiva.

Sol: Falso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c_1 c_2 c_3

$$Im(A) = Col(A) = Gen\{c_1, c_2, c_3\}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{R}^3$$

$$\forall\ b \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow b \in Col(A)$$

$Ax = b$ tiene solución.

A es sobreyectiva $\Rightarrow$ Falso