Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2023

Álgebra Lineal - MAT1203
PAUTA Interrogación 2

1. Considere la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Encuentre la inversa de la matriz A.
   (b) Escriba A^{-1} como producto de matrices elementales.

Solución

(a) Reducimos a su forma escalonada reducida a la matriz ampliada de A por la identidad:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{f_3 - f_2 \\ f_1 - 2f_2}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{f_1 - 5f_3 \\ f_2 + 3f_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
por lo tanto la matriz inversa es $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Del ítem anterior, interpretando como matrices elementales a las operaciones elementales que aplicamos a A, podemos escribir:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} A = I$$
lo que implica que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Puntaje

- 1 punto por establecer una manera de encontrar A^{-1}, ya sea con operaciones elementales o matriz adjunta, por ejemplo.
- 1 punto por desarrollar el cálculo de A^{-1}.
- 1 punto por encontrar correctamente A^{-1}.
- 1 punto por plantear, implícita o explícitamente, una manera de escribir A^{-1} como producto de elementales.
- 1 punto por encontrar matrices elementales correctas.
- 1 punto por escribirlas en el orden correcto.

2. Suponga que la matriz A ha sido reducida a una forma escalonada como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & 8 & -10 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ -9 & 5 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 7 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) Determine la factorización LU de A.

(b) Calcule el determinante de A.

Solución

(a) La matriz U es la forma escalonada del enunciado, $U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Como las operaciones elementales fueron aplicadas en orden de arriba a abajo y de izquierda a derecha, la matriz L corresponde a los números opuestos a los multiplicadores de las filas en la posición de la entrada principal anulada, es decir: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Como $A = LU$, entonces $|A| = |L||U| = |U| = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-4) = -24$.

Puntaje

- 1 punto por definir U correctamente.
- 2 puntos por definir L correctamente.
- 1 punto por establecer una manera de encontrar $|A|$.
- 2 puntos por determinar $|A|$ correctamente.

3. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} = x(x-a-b-c)^2.$$

Solución

$$\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} \overset{c_2+c_1}{=} \begin{vmatrix} x-a-b & x-b & b \\ c & x-b & b \\ c & a+c & x-a-c \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} x-a-b & x & b \\ c & x & b \\ c & x & x-a-c \end{vmatrix} \overset{\substack{f_1-f_2 \\ f_3-f_2}}{=} \begin{vmatrix} x-a-b-c & 0 & 0 \\ c & x & b \\ 0 & 0 & x-a-b-c \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} x-a-b-c & 0 \\ 0 & x-a-b-c \end{vmatrix} = x(x-a-b-c)^2.$$

Puntaje

- 6 puntos si el(la) estudiante escribe la demostración correctamente, sin errores.
- Asignar 3 puntos si termina la demostración, pero comete algunos errores de signo o de multiplicación.
- Si no termina la demostración, asignar 1 punto por cada propiedad u operación aplicada correctamente al determinante, con máximo de 3 puntos.

4. (a) Si A es una matriz invertible de $n \times n$, demuestre que

$$\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}.$$

(b) Sea S el paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, y sea $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule el área de la imagen de S bajo el mapeo $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

Solución

(a) La matriz adjunta de una matriz invertible cumple que $\operatorname{Adj}(A) = |A|A^{-1}$. Por lo tanto

$$\det(\operatorname{Adj}(A)) = \det(|A|A^{-1}) = |A|^n \det(A^{-1}) = |A|^n |A|^{-1} = |A|^{n-1}.$$

(b) Sea S' la imagen de S por la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. El área de S' es:

$$\text{Área de } S' = |\det(A)|(\text{Área de } S) = \left|\det \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\right| \left|\det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\right| = |6||-4| = 24.$$

Puntaje

- 1 punto por establecer la relación entre $\operatorname{Adj}(A)$ y A^{-1}.
- 1 punto por aplicar la propiedad de separación del determinante en la multiplicación.
- 1 punto por concluir correctamente que $|\operatorname{Adj}(A)| = |A|^{n-1}$.
- 1 punto por establecer una fórmula para calcular el área de S'.
- 1 punto por calcular correctamente el área de S.
- 1 punto por calcular correctamente el área de S'.