① a) V

$$A(A^{-1}B + I) = AA^{-1}B + A \cdot I$$
$$= IB + AI$$
$$= B + A$$
$$= A + B$$

∴ La inversa de $A+B$ es $(A+B)^{-1}$

b) V

p.d. $(I - vw^T)^{-1} = I + vw^T$

p.d. $(I - vw^T) \cdot (I + vw^T) = I$

$$(I - vw^T)(I + vw^T)$$
$$= I + vw^T - vw^T - vw^T vw^T$$

(cancelan)

$$= I - vw^T vw^T$$

pero $v^T w = 0$

como $v^T w$ es de 1×1

$$(v^T w)^T = v^T w$$

$$w^T v = v^T w$$

entonces $w^T v = 0$

luego $I - v w^T v w^T$

$$= I - v \cdot 0 \cdot w^T$$

$$= I - \text{matriz nula}$$

$$= I$$

(2)

a) V

q está dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= L U$$

como la diagonal de U tiene
1, 2 y 3 que son positivos, entonces
q es positiva definida.

b) V

Sea $A = A^T$ positiva definida.

Si A no es invertible, existe

$u \neq \vec{0}$ tal que $Au = \vec{0}$

$\rightarrow u^T A u = u^T \vec{0}$

$u^T A u = 0$

pero esto es una contradicción
pr que A es positiva definida

$\rightarrow\leftarrow$

∴ A sí es invertible.

(5)

a) V

$$\det \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a-1 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$F_3 \to F_3 - F_4$
$F_2 \to F_2 - F_3$
$F_1 \to F_1 - F_2$

$$= (a-1)^3 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$F_i \to \frac{1}{a-1} F_i$
$\forall i = 1, 2, 3$

$$= (a-1)^3 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{bmatrix}$$

$F_4 \to F_4 - F_1$
$F_4 \to F_4 - 2F_2$

$F_4 \to F_4 - 3F_3$

$= (a-1)^3 \cdot 1^3 \cdot (a+3)$

$= (a-1)^3 (a+3)$

b) F

$A = [v_1 - v_3 + v_4 \quad -v_2 - v_3 \quad v_3 - v_1 \quad v_1 + v_2 + 2v_4]$

$= [v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_4] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

entonces

$\det(A) = \det [v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_4] \cdot \det(B)$

con $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(B) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$F_3 \to F_3 + F_1$

como tiene dos filas iguales,
entonces $\det(B) = 0$
o sea $\det(A) = 0$

(4)

a) V

$$U = \{ p(x) \ / \ p(1) + p(0) = 0 \}$$

$$p(x) = a + bx + cx^2 \in U$$

$$\rightarrow \quad a + b + c + a = 0$$

$$\rightarrow \quad c = -2a - b$$

$$U = \{ a + bx + (-2a - b)x^2 \}$$

$$= \{ a(1 - 2x^2) + b(x - x^2) \}$$

$$= \text{Gen} \{ (1 - 2x^2), (x - x^2) \}$$

o sea U es un subespacio.

b) F

$$I = x_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1+x_2 & x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2 & x_1+x_2+x_3 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$

$1 = 2x_1+x_2$

$0 = x_1+x_2+x_3$ $\searrow$

$0 = x_1+x_2$ $\rightarrow\leftarrow$

$1 = x_1+x_2+x_3$ $\nearrow$

no tiene solución.

$\therefore$ no es combinación lineal.