Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2020

MAT1203 – Álgebra Lineal

Solución Interrogación N° 2

11. Calcule el determinante de la matriz

Forma 1. $A = \begin{bmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{bmatrix}$

Forma 2. $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

Forma 3. $A = \begin{bmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{bmatrix}$

Forma 4. $A = \begin{bmatrix} x & -2 & -2 & -2 \\ -2 & x & -2 & -2 \\ -2 & -2 & x & -2 \\ -2 & -2 & -2 & x \end{bmatrix}$

Forma 5. $A = \begin{bmatrix} x & 3 & 3 & 3 \\ 3 & x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{bmatrix}$

¿Qué condición tiene que cumplir x para que la matriz A sea invertible?

Solución. Usando operaciones elementales de tipo III: $E_{i,1}(-1)$ que corresponde a sumar a la fila i, -1 vez la fila 1 para $i \in 2, 3, 4$ y seguido de esto si expandimos por la primera columna se obtiene que:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \overset{E_{i,1}(-1)\ i=2,\ldots,4}{=} \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$= x(x-a)^3 + a(x-a)^3 - (a-x)\begin{vmatrix} a & a & a \\ x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} - (x-b)\begin{vmatrix} a & a & a \\ x-a & 0 & 0 \\ 0 & x-a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)^3(x+3a).$$

Forma 1. $\det(A) = (x-2)^3(x+6)$ y A es invertible si $x \neq 2$ y $x \neq -6$.

Forma 2. $\det(A) = (x-1)^3(x+3)$ y A es invertible si $x \neq 1$ y $x \neq -3$.

Forma 3. $\det(A) = (x+1)^3(x-3)$ y A es invertible si $x \neq -1$ y $x \neq 3$.

Forma 4. $\det(A) = (x+2)^3(x-6)$ y A es invertible si $x \neq -2$ y $x \neq 6$.

Forma 5. $\det(A) = (x-3)^3(x+9)$ y A es invertible si $x \neq 3$ y $x \neq -9$.

Puntaje Pregunta 11.

- 4 puntos por obtener que el determinante de la matriz A.
- 2 puntos por encontrar los valores de x que permiten que la matriz A se invertible.

12. Encuentre la factorización $PA = LU$ para la matriz

Forma 1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -9 & 0 & -4 \\ 9 & 9 & 14 \end{bmatrix}$

Forma 2. $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 10 & 2 & -5 \\ 10 & 10 & 16 \end{bmatrix}$

Forma 3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 19 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Forma 4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

Forma 5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

y use esta factorización para resolver el sistema $Ax = b$ donde $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución. Para que la pregunta se considere correcta deben estar claros los procedimientos de reducción por filas de las matrices involucradas.

Forma 1. Tenemos que $P = I$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Primero resolviendo $Ly = b$ se obtiene que $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$.

Ahora basta solucionar $Ux = y$ y resulta que $x = \begin{bmatrix} 8/9 \\ 10/3 \\ -5/2 \end{bmatrix}$.

Forma 2. Tenemos que $P = I$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Primero resolviendo $Ly = b$ se obtiene que $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -15 \end{bmatrix}$.

Ahora basta solucionar $Ux = y$ y resulta que $x = \begin{bmatrix} -23/15 \\ 9/2 \\ -5/3 \end{bmatrix}$.

Forma 3. Tenemos que $P = I$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Primero resolviendo $Ly = b$ se obtiene que $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Ahora basta solucionar $Ux = y$ y resulta que $x = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$.

Forma 4. Tenemos que $P = I$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7/2 & 6 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$.

Primero resolviendo $Ly = b$ se obtiene que $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Ahora basta solucionar $Ux = y$ y resulta que $x = \begin{bmatrix} -8/49 \\ 31/49 \\ -2/7 \end{bmatrix}$.

Forma 5. Tenemos que $P = I$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Primero resolviendo $Ly = b$ se obtiene que $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -16 \end{bmatrix}$.

Ahora basta solucionar $Ux = y$ y resulta que $x = \begin{bmatrix} -5/2 \\ -51/2 \\ -16 \end{bmatrix}$.

Puntaje Pregunta 12.

- 2 puntos por obtener la matriz L.
- 2 puntos por obtener la matriz U.
- 2 puntos por encontrar el valores de x que permiten que la matriz A se invertible.

13. Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por

Forma 1. $T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$

Forma 2. $T(p) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$

Forma 3. $T(p) = \begin{bmatrix} p(2) \\ p(0) \end{bmatrix}$

Forma 4. $T(p) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(0) \end{bmatrix}$

Forma 5. $T(p) = \begin{bmatrix} p(2) \\ p(1) \end{bmatrix}$

a) Demuestre que T es una transformación lineal.

b) Determine una base para $\text{Nul}(T)$.

Solución.

a) Dados $p, q \in P_2(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$

$$T(cp+q) = \begin{bmatrix} (cp+q)(n) \\ (cp+q)(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cp(n)+q(n) \\ cp(m)+q(m) \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} p(n) \\ p(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q(n) \\ q(m) \end{bmatrix} = cT(p) + T(q)\,.$$

Luego T es una transformación lineal.

b) Tenemos que $\text{Nul}(T) = \left\{ ax^2+bx+c \mid T(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Forma 1.

$$\text{Nul}(T) = \left\{ ax^2+bx+c \mid \begin{bmatrix} c \\ a+b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \{-bx^2+bx \mid b \in \mathbb{R}\} = \text{Gen}\{-x^2+x\}$$

Luego, $\{-x^2+x\}$ es linealmente independiente y genera al espacio nulo de T, luego es una base.

Forma 2.

$$\begin{aligned} \text{Nul}(T) &= \left\{ ax^2+bx+c \mid \begin{bmatrix} a+b+c \\ 4a+2b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \frac{c}{2}x^2 - \frac{3c}{2}x + c \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen}\left\{ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \right\} \end{aligned}$$

Luego, $\left\{\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right\}$ es linealmente independiente y genera al espacio nulo de T, luego es una base.

Forma 3.

$$\begin{aligned} \text{Nul}(T) &= \left\{ ax^2+bx+c \mid \begin{bmatrix} 4a+2b+c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ -\frac{b}{2}x^2 + bx \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen}\left\{ -\frac{1}{2}x^2 + x \right\} \end{aligned}$$

Luego, $\left\{-\frac{1}{2}x^2 + x\right\}$ es linealmente independiente y genera al espacio nulo de T, luego es una base.

Forma 4.

$$\begin{aligned}\text{Nul}(T) &= \left\{ax^2+bx+c \mid \begin{bmatrix} a+b+c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \left\{-bx^2+bx \mid b \in \mathbb{R}\right\} = \text{Gen}\left\{-x^2+x\right\}\end{aligned}$$

Luego, $\{-x^2+x\}$ es linealmente independiente y genera al espacio nulo de T, luego es una base.

Forma 5.

$$\begin{aligned}\text{Nul}(T) &= \left\{ax^2+bx+c \mid \begin{bmatrix} 4a+2b+c \\ a+b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \left\{\frac{c}{2}x^2-\frac{3c}{2}x+c \mid c \in \mathbb{R}\right\} = \text{Gen}\left\{\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1\right\}\end{aligned}$$

Luego, $\left\{\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1\right\}$ es linealmente independiente y genera al espacio nulo de T, luego es una base.

Puntaje pregunta 13.

- 3 puntos por demostrar que $T(cp+q) = cT(p)+T(q)$.
- 3 puntos por encontrar una base para $Nul(T)$.