PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2020

PAUTA INTERROGACIÓN 4
MAT1203 $\star$ Álgebra Lineal

1. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   a) Encuentre una base de $W^{\perp}$.

   b) Escriba el vector $y = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ como la suma de un vector en W y un vector en $W^{\perp}$

   Solución:

   a) Una base de W es $\{u, v\}$ ya que dichos vectores son linealmente independientes pues no son múltiplos entre ellos. De esta forma

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \in W^{\perp} \iff z \perp u, z \perp v$$

$$\iff z \cdot u = 0, z \cdot v = 0$$

$$\iff \begin{cases} z_1 + 2z_2 + 3z_3 - z_4 + 2z_5 = 0 \\ 2z_1 + 4z_2 + 7z_3 + 2z_4 - z_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z_1 = -2z_2 + 13z_4 - 17z_5 \\ z_3 = -4z_4 + 5z_5 \end{cases}$$

$$\iff z = \begin{bmatrix} -2z_2 + 13z_4 - 14z_5 \\ z_2 \\ -4z_4 + 5z_5 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} = z_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z_4 \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_5 \begin{bmatrix} -17 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde z_2, z_4, z_5 pueden tomar cualquier valor real. Ya que estos tres últimos vectores son linealmente independientes, entonces una base de $W^{\perp}$ es el conjunto $\{b_1, b_2, b_3\}$ donde $b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} -17 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Podemos escribir y como $y = x + z$ donde $x = proy_W(y)$ y $z = x - y$.

$$x = \frac{y \cdot b_1}{||b_1||^2} b_1 + \frac{y \cdot b_2}{||b_2||^2} b_2 + \frac{y \cdot b_3}{||b_3||^2} b_3 \in W$$

$$x \cdot z = x \cdot x - x \cdot y = ||x||^2 - \left(\frac{y \cdot b_1}{||b_1||^2} b_1 + \frac{y \cdot b_2}{||b_2||^2} b_2 + \frac{y \cdot b_3}{||b_3||^2} b_3 \right) \cdot y$$

$$= \frac{(y \cdot b_1)^2}{||b_1||^2} b_1 + \frac{(y \cdot b_2)^2}{||b_2||^2} + \frac{(y \cdot b_3)^2}{||b_3||^2} - \frac{y \cdot b_1}{||b_1||^2}(b_1 \cdot y) - \frac{y \cdot b_2}{||b_2||^2}(b_2 \cdot y) - \frac{y \cdot b_3}{||b_3||^2}(b_3 \cdot y) = 0.$$

$$\implies z = x - y \in W^{\perp}.$$

Puntaje:

- 1,5 puntos por determinar generadores de $W^{\perp}$
- 1,5 puntos por decir que los generadores son ortogonales y por lo tanto forman una base.
- 1,5 puntos por descomponer $y = proy_W(y) + (y - proy_W(y))$ indicando que $proy_W(y) \in W$.
- 1,5 puntos por decir que $y - proy_W(y)$ es un vector del complemento ortogonal de W.
- No es necesario calcular los vectores del item b).

2. Encuentre el valor de k para que $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ k \\ 3 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 3 \\ k \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$ sean ortogonales.

   Solución:

   Para que los vectores u y v sean ortogonales, estos deben cumplir que $u \cdot v = 0$.

   $$u \cdot v = 3 + 2k + 7k - 15 = 9k - 12 = 0 \iff k = \frac{4}{3}.$$

   Puntaje:

   - 3 puntos por indicar que los vectores son ortogonales cuando $u \cdot v = 0$.
   - 3 puntos por encontrar el valor correcto de k.

3. Sea $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 \\ -13 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.

   a) Demuestre que S es una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$.

   b) Encuentre las coordendadas del vector $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ en la base S.

   Solución:

a) Primero probamos que cada par de vectores de S son ortogonales entre sí.

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}=1+2+0-3=0,\qquad \begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-9\\2\end{bmatrix}=1+1+0-2=0,$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\-9\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}16\\-13\\1\\3\end{bmatrix}=16-13+0-3=0,\qquad \begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-9\\2\end{bmatrix}=1+2-9+6=0,$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}16\\-13\\1\\3\end{bmatrix}=16-26+1+9=0,\qquad \begin{bmatrix}1\\1\\-9\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}16\\-13\\1\\3\end{bmatrix}=16-13-9+6=0.$$

Ya que S es un conjunto ortogonal, entonces también es un conjunto de 4 vectores linealmente independientes, por lo tanto S es base de $\mathbb{R}^4$.

b) Ya que S es una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$, entonces

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}_S=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{bmatrix}$$

donde

$$\alpha=\frac{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\|^2}=\frac{x+y-w}{1+1+1}=\frac{1}{3}(x+y-w),$$

$$\beta = \frac{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|^2} = \frac{x + 2y + z + 3w}{1 + 4 + 1 + 9} = \frac{1}{15}(1 + 2y + z + 3w),$$

$$\gamma = \frac{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|^2} = \frac{x + y - 9z + 2w}{1 + 1 + 81 + 4} = \frac{1}{87}(x + y - 9z + 2w),$$

$$\delta = \frac{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ -13 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 16 \\ -13 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|^2} = \frac{16x - 13y + z + 3w}{256 + 169 + 1 + 9} = \frac{1}{435}(16x - 13y + z + 3w).$$

En conclusión,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(x + y - w) \\ \frac{1}{15}(1 + 2y + z + 3w) \\ \frac{1}{87}(x + y - 9z + 2w) \\ \frac{1}{435}(16x - 13y + z + 3w) \end{bmatrix}$$

Puntaje:

- 2 puntos por comprobar que S es un conjunto ortogonal.
- 1 punto por concluir que S es base ortogonal.

- 2 puntos si la fórmula de cada coordenada es correcta.
- 1 punto si todos los cálculos de las coordenadas son correctos.

4. Considere el subespacio U de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre una base ortogonal de U utilizando el proceso de Gram-Schmidt.

b) Encuentre una base ortonormal de U.

Solución:

a) Buscamos una base ortogonal $\{x, y, z\}$ de U. Definimos:

$$x = u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$y = v - \frac{v \cdot x}{||x||^2} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{8}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$z = w - \frac{w \cdot x}{||x||^2} x - \frac{w \cdot y}{||y||^2} y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} - \left(\frac{-4}{4}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{-9}{6}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base ortogonal de U.

b) Para obtener una base ortonormal de U debemos normalizar cada vector encontrado en el item anterior: $\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/5\sqrt{2} \\ 3/5\sqrt{2} \\ -6/5\sqrt{2} \\ 2/5\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$

Puntaje:

- 4 puntos por obtener una base ortogonal de U.
- 2 puntos por obtener una base ortonormal de U.

5. Sean $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

a) Encuentre el punto de W más cercano a v.

b) Calcule la distancia de v a W,

Solución:

a) El punto más cercano de W al vector v es el vector $proy_W(v)$. Notamos que una base ortogonal de W es $\{u_1, u_2\}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} proy_W(v) =& \frac{v \cdot u_1}{||u_1||^2} u_1 + \frac{v \cdot u_2}{||u_2||^2} u_2 \\ =& \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{6} u_2 \\ =& \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) La distancia de v a W es:

$$d(v, W) = ||v - proy_W(v)|| = \left|\left| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \right|\right| = \frac{1}{6} \left|\left| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right|\right| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Puntaje:

- 1 punto por indicar que el punto más cercano a W es $proy_W(v)$.
- 1 punto por la fórmula correcta para calcular $proy_W(v)$.
- 1 punto por calcular correctamente $proy_W(v)$.
- 1,5 punto por indicar que la distancia de v a W es $||v - proy_W(v)||$.
- 1,5 puntos por calcular correctamente la distancia.

6. Encuentre una matriz ortogonal cuya primera fila sea $u_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Solución:

Llamamos $v_1 = (3u_1)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Elegimos algún v_2 que sea ortogonal con v_1. Por ejemplo, podemos definir $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Elegimos un tercer vector que sea linealmente independiente con los anteriores: $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt encontramos un vector ortogonal a los dos primeros:

$$v_4 = v_3 - \frac{v_3 \cdot v_1}{||v_1||^2} v_1 - \frac{v_3 \cdot v_2}{||v_2||^2} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De esta forma, los vectores v_1, v_2, v_4 son ortogonales entre si. Luego,

$$\frac{1}{||v_1||} v_1 = u_1^T = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{||v_2||} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{||v_4||}v_4 = \begin{bmatrix} {}^{-4}/_{\sqrt{18}} \\ {}^{1}/_{\sqrt{18}} \\ {}^{1}/_{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$$

La matriz buscada es:

$$\begin{bmatrix} {}^{1}/_{3} & 0 & {}^{-4}/_{\sqrt{18}} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{\sqrt{2}} & {}^{1}/_{\sqrt{18}} \\ {}^{2}/_{3} & {}^{-1}/_{\sqrt{2}} & {}^{1}/_{\sqrt{18}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3} & {}^{2}/_{3} \\ 0 & {}^{1}/_{\sqrt{2}} & {}^{-1}/_{\sqrt{2}} \\ {}^{-4}/_{\sqrt{18}} & {}^{1}/_{\sqrt{18}} & {}^{1}/_{\sqrt{18}} \end{bmatrix}.$$

Puntaje:

- 3 puntos por encontrar cada una de las filas restantes (justificadamente)
- Restar 1 punto si el vector u_1 queda como columna.

7. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Encuentre una solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ y calcule el error.

   Solución:

   Para buscar solución de mínimos cuadrados, resolvemos el sistema $A^T A\hat{x} = A^T b$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

   La matriz ampliada es:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 11 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Por lo tanto la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ es el vector $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

El error de mínimos cuadrados es:

$$E = ||b - proy_{Col(A)}(b)|| = ||b - A\hat{x}|| = \left|\left| \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right|\right| = \left|\left| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right|\right| = \sqrt{6}.$$

Puntaje:

- 2 puntos por plantear la ecuación $A^T A\hat{x} = A^T b$.
- 2 puntos por encontrar el vector $\hat{x}$.
- 2 puntos por encontrar el error.

8. Diagonalice ortogonalmente la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución:

El polinomio característico de la matriz es

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1)$$

por lo que los valores propios son $\lambda = 6$ y $\lambda = 1$.
Determinamos generadores de los espacios propios:

$$E(6) = Ker(A - 6I) = Ker \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = Ker \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = Gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$E(1) = Nul(A - 6I) = Ker \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = Ker \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = Gen \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ambos vectores generadores son ortogonales ya que corresponden a valores propios distintos y A es simétrica. Definimos a la matriz P cuyas columnas son los vectores generadores normalizados:

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Ya que A es simétrica entonces es ortogonalmente diagonalizable, donde

$$A = P \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Puntaje:

- 1 punto por encontrar valores propios
- 1 punto por determinar vectores propios
- 1 punto por indicar que los vectores generadores son ortogonales.
- 1 punto por definir correctamente la matriz P.
- 1 punto por definir correctamente la matriz D.
- 1 punto por escribir $A = PDP^T$.