PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 24: Rango

1. Suponga que la matriz A es equivalente por filas a B. Sin hacer cálculos, liste el rango de A y la dimensión del espacio nulo de A. Luego encuentre las bases para $\text{Col}(A)$, $\text{Fila}(A)$ y $\text{Nul}(A)$.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 & 6 & 3 & 6 \\ -2 & -3 & 6 & -3 & 0 & -6 \\ 4 & 9 & -12 & 9 & 3 & 12 \\ -2 & 3 & 6 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Si una matriz A de 4×7 tiene rango 3, determine $\dim(\text{Nul}(A))$, $\dim(\text{Fila}(A))$ y el rango de A^T.

3. Si una matriz A de 7×5 tiene rango 2, determine $\dim(\text{Nul}(A))$, $\dim(\text{Fila}(A))$ y el rango de A^T.

4. Suponga que una matriz A de 4×7 tiene cuatro columnas pivote. ¿Es $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^4$? ¿Es $\text{Nul}(A) = \mathbb{R}^3$? Explique sus respuestas.

5. Supongamos que una matriz A de 6×8 tiene cuatro columnas pivote. ¿Cuál es la $\dim(\text{Nul}(A))$? ¿Es $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^4$? ¿Por qué?

6. Si el espacio nulo de una matriz A de 4×6 es de dimensión 3, ¿cuál es la dimensión del espacio columna de A? ¿Es $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^3$? ¿Por qué?

7. Si el espacio nulo de una matriz A de 8×7 es de dimensión 5, ¿cuál es la dimensión del espacio columna de A?

8. Si el espacio nulo de una matriz A de 8×5 es de dimensión 3, ¿cuál es la dimensión del espacio fila de A?

9. Si el espacio nulo de una matriz A de 5×4 es de dimensión 2, ¿cuál es la dimensión del espacio fila de A?

10. Si A es una matriz de 7×5, ¿cuál es el mayor rango posible de A? Si A es una matriz de 5×7, ¿cuál es el mayor rango posible de A? Explique sus respuestas.

11. Si A es una matriz de 5×4, ¿cuál es la mayor dimensión posible del espacio fila de A? Si A es una matriz de 4×5, ¿cuál es la máxima dimensión posible del espacio fila de A? Explique sus respuestas.

12. Si A es una matriz de 3×7, ¿cuál es la menor dimensión posible de $\text{Nul}(A)$?

13. Si A es una matriz de 7×5, ¿cuál es la menor dimensión posible de $\text{Nul}(A)$?

14. Suponga que todas las soluciones de un sistema homogéneo de cinco ecuaciones lineales con seis incógnitas son múltiplos de una solución diferente de cero. ¿El sistema necesariamente tendrá una solución para cada posible elección de las constantes en el lado derecho de las ecuaciones? Explique su respuesta.

15. Suponga que un sistema no homogéneo de nueve ecuaciones lineales con 10 incógnitas tiene una solución para todas las posibles constantes de los miembros derechos de las ecuaciones. ¿Es posible encontrar dos soluciones diferentes de cero del sistema homogéneo asociado que no sean múltiplos una de la otra? Analice.

16. Un sistema homogéneo de 12 ecuaciones lineales con ocho incógnitas tiene dos soluciones fijas que no son múltiplos una de la otra, y todas las demás soluciones son combinaciones lineales de estas dos soluciones. ¿Puede describirse el conjunto de todas las soluciones con menos de 12 ecuaciones lineales homogéneas? Si es así, ¿con cuántas? Analice.

17. Un científico resuelve un sistema no homogéneo de 10 ecuaciones lineales con 12 incógnitas y encuentra que tres de las incógnitas son variables libres. ¿Puede el científico estar seguro de que, si se cambia el lado derecho de las ecuaciones, el nuevo sistema no homogéneo tendrá una solución? Analice.

18. ¿Cuál de los subespacios $\text{Fila}(A)$, $\text{Col}(A)$, $\text{Nul}(A)$, $\text{Fila}(A^T)$, $\text{Col}(A^T)$ y $\text{Nul}(A^T)$ están en $\mathbb{R}^m$ y cuáles están en $\mathbb{R}^n$? ¿Cuántos subespacios distintos están en esta lista?

19. Justifique las siguientes igualdades:

    (a) $\dim(\text{Fila}(A)) + \dim(\text{Nul}(A)) = n$ (Número de columnas de A)

    (b) $\dim(\text{Col}(A)) + \dim(\text{Nul}(A^T)) = m$ (Número de filas de A)

20. Con base en el ejercicio anterior, explique por qué la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ si y solo si la ecuación $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial.

21. Suponga que A es $m \times n$ y $\mathbf{b}$ está en $\mathbb{R}^m$. ¿Qué tiene que ser verdad acerca del rango de $\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ y el rango A para que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea coherente?