PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Solución Ayudantía 10 - MAT1203

1. El conjunto $B = \{1+t,\ 1+t^2,\ t+t^2\}$ es una base para $\mathbb{P}_2$. Encuentre el vector de coordenadas de

$$p(t) = 6 + 3t - t^2$$

en relación con B.

Solución:

Como B es base, existen escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$p(t) = \alpha(1+t) + \beta(1+t^2) + \gamma(t+t^2).$$

Desarrollamos el lado derecho:

$$\alpha(1+t) = \alpha + \alpha t, \quad \beta(1+t^2) = \beta + \beta t^2, \quad \gamma(t+t^2) = \gamma t + \gamma t^2.$$

Sumando:

$$\alpha + \alpha t + \beta + \beta t^2 + \gamma t + \gamma t^2 = (\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma)t + (\beta+\gamma)t^2.$$

Debemos igualar con

$$p(t) = 6 + 3t - t^2.$$

Por unicidad de la representación en la base estándar $\{1, t, t^2\}$ obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \alpha + \gamma = 3 \\ \beta + \gamma = -1 \end{cases}$$

Resolución: de la segunda ecuación $\gamma = 3 - \alpha$. Sustituimos en la tercera:

$$\beta + (3-\alpha) = -1 \quad \Longrightarrow \quad \beta - \alpha = -4 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \alpha - 4.$$

Sustituimos en la primera:

22.jpg

$$\alpha + (\alpha - 4) = 6 \quad \Longrightarrow \quad 2\alpha - 4 = 6 \quad \Longrightarrow \quad 2\alpha = 10 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 5.$$

Entonces

$$\beta = \alpha - 4 = 5 - 4 = 1, \qquad \gamma = 3 - \alpha = 3 - 5 = -2.$$

Por lo tanto,

$$[p]_B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{[\,6 + 3t - t^2\,]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.}$$

2. Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bases para un espacio vectorial V, y suponga que

$$a_1 = 4b_1 - b_2, \qquad a_2 = -b_1 + b_2 + b_3, \qquad a_3 = b_2 - 2b_3.$$

(a) Encuentre la matriz de cambio de coordenadas de A a B.

(b) Determine $[x]_B$ para $x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$.

Solución:

(a) La matriz de cambio *de A a B* es, por definición,

$$P_{B\leftarrow A} = \begin{bmatrix} [a_1]_B & [a_2]_B & [a_3]_B \end{bmatrix}.$$

Pero el enunciado ya nos dice cada a_i escrito en la base B.

- $a_1 = 4b_1 - b_2 + 0b_3 \;\Rightarrow\; [a_1]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- $a_2 = -b_1 + b_2 + b_3 \;\Rightarrow\; [a_2]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $a_3 = 0b_1 + b_2 - 2b_3 \;\Rightarrow\; [a_3]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto,

$$P_{B\leftarrow A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Esta es la matriz que toma coordenadas en A y las convierte en coordenadas en B:

$$[x]_B = P_{B\leftarrow A}[x]_A.$$

(b) Tenemos

$$x = 3a_1 + 4a_2 + a_3.$$

En coordenadas de la base A esto es simplemente

$$[x]_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para obtener $[x]_B$, usamos la matriz de cambio hallada:

$$[x]_B = P_{B\leftarrow A}[x]_A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 3 + (-1)\cdot 4 + 0\cdot 1 \\ (-1)\cdot 3 + 1\cdot 4 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 3 + 1\cdot 4 + (-2)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 4 + 0 \\ -3 + 4 + 1 \\ 0 + 4 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{[x]_B = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.}$$

3. Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ bases para V y sea

$$P = \begin{bmatrix} [d_1]_A & [d_2]_A & [d_3]_A \end{bmatrix}.$$

¿Cuál de las siguientes ecuaciones satisface P para toda x en V?

(i) $[x]_A = P[x]_D$ (ii) $[x]_D = P[x]_A$

Solución:
La matriz P tiene como columnas las coordenadas de los vectores de la base D *expresados en la base* A. Eso, por definición, es la **matriz de cambio de la base** D **a la base** A. Y la regla general dice:

$$[x]_{\text{nueva}} = (\text{matriz de cambio}) \cdot [x]_{\text{vieja}}.$$

Aquí, la base "nueva" es A y la "vieja" es D. Por lo tanto:

$$[x]_A = P_{A \leftarrow D}[x]_D.$$

Es decir,

$$\boxed{\text{la que se cumple es (i).}}$$

La (ii) sería cierta sólo usando P^{-1}.

4. Considere $P_1 = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ y sean

$$B = \{1 + x,\ 1 - 2x\} \quad \text{y} \quad C = \{w_1, w_2\}$$

bases para P_1. Si la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz de cambio de coordenadas de la base B a C, determine w_1 y w_2.

Solución:
Que P sea la matriz de cambio de B a C significa que

$$[p]_C = P[p]_B \quad \text{para todo } p \in P_1.$$

En particular, las columnas de P son las coordenadas en C de los polinomios de la base B:

$$[1+x]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad [1-2x]_C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eso se traduce en

$$1 + x = 2w_1 - 1w_2, \tag{1}$$
$$1 - 2x = 3w_1 + 1w_2. \tag{2}$$

Escribamos

$$w_1 = a + bx, \qquad w_2 = c + dx.$$

Sustituimos en (1):

$$1 + x = 2(a + bx) - (c + dx) = (2a - c) + (2b - d)x,$$

de donde

$$2a - c = 1, \qquad 2b - d = 1. \tag{1}$$

Sustituimos en (2):

$$1 - 2x = 3(a + bx) + (c + dx) = (3a + c) + (3b + d)x,$$

de donde

$$3a + c = 1, \qquad 3b + d = -2. \tag{2}$$

Resolvamos primero para a, c: de $3a + c = 1$ se tiene $c = 1 - 3a$, lo metemos en $2a - c = 1$:

$$2a - (1 - 3a) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2a - 1 + 3a = 1 \quad \Longrightarrow \quad 5a - 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad 5a = 2 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{2}{5}.$$

Entonces

$$c = 1 - 3a = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}.$$

Ahora para b, d: de $2b - d = 1$ tenemos $d = 2b - 1$. Lo ponemos en $3b + d = -2$:

$$3b + (2b - 1) = -2 \quad \Longrightarrow \quad 5b - 1 = -2 \quad \Longrightarrow \quad 5b = -1 \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{1}{5}.$$

Entonces

$$d = 2b - 1 = 2\left(-\frac{1}{5}\right) - 1 = -\frac{2}{5} - 1 = -\frac{2}{5} - \frac{5}{5} = -\frac{7}{5}.$$

Con esto,

$$w_1 = a + bx = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}(2 - x),$$
$$w_2 = c + dx = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}x = \frac{1}{5}(-1 - 7x).$$

Por lo tanto,

$$\boxed{w_1 = \frac{1}{5}(2 - x), \qquad w_2 = \frac{1}{5}(-1 - 7x).}$$

(Se puede comprobar reemplazando en (1) y (2) que efectivamente se obtienen $1 + x$ y $1 - 2x$.)