PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Segundo Semestre 2019
Ayudante: Camila Pavesi (capavesi@uc.cl)

MAT1203 - Álgebra Lineal - Guía I3

Dimensiones, Rango, Cambio de base, Valores y vectores propios, Diagonalización

1. Hallar bases y dimensiones de:

   a) $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$

   b) $\left\langle \begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&-5\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&-3\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&2\\1&4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&-1\\1&5\end{bmatrix} \right\rangle$

   c) $\{A \in M_{2\times 4} : AQ = 0\}$ donde $Q = \begin{bmatrix}1&1\\-1&1\\2&0\\-2&1\end{bmatrix}$

Solución

a) Se seleccionarán los elementos L.I. y con ellos se conformará la base.

$$\begin{bmatrix}1&1&1&4&1\\2&1&-1&0&2\\3&1&5&-1&-1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&1&4&1\\0&-1&-3&-8&0\\0&-2&2&-13&-4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&1&4&1\\0&-1&-3&-8&0\\0&0&8&3&-4\end{bmatrix}$$

Las primeras tres columnas tienen pivote, por lo que los tres primeros elementos son linealmente independientes. Entonces

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix} \right\}$$

Como la base contiene 3 elementos, la dimensión de este espacio es 3.

b) Se seleccionarán los elementos L.I. y con ellos se conformará la base.

$$\begin{bmatrix}1&1&2&0&2\\2&-5&-3&2&-1\\0&0&0&1&1\\0&1&1&4&5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&2&0&2\\0&1&1&4&5\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

En este caso, hay varios conjuntos de elementos L.I.:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

Cualquiera de los conjuntos anteriores sirve como base para el espacio. Como cualquier base tiene 3 elementos, la dimensión del espacio es 3.

c) Sea $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$ una matriz cualquiera.
Para que A pertenezca al espacio

$$AQ = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} a-b+2c-2d & a+b+d \\ e-f+2g+2h & e+f+h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la primera fila de AQ:

$$a - b + 2c - 2d = 0$$

$$a + b + d = 0$$

Con estas dos ecuaciones es posible expresar a y b en función de c y d:

$$a = -c + \frac{1}{2}d$$

$$b = c - \frac{3}{2}d$$

Análogamente para la segunda fila de AQ:

$$e = -g + \frac{1}{2}h$$

$$f = g - \frac{3}{2}h$$

Se reemplazan estas relaciones en la matriz A.

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c+\frac{1}{2}d & c-\frac{3}{2}d & c & d \\ -g+\frac{1}{2}h & g-\frac{3}{2}h & g & h \end{bmatrix}$$

$$= c \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas 4 matrices son L.I., por lo que

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Finalmente, la dimensión del espacio es 4.

2. Sea A tal que $dim(Nul(A)) = 3$ y

$$A^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determine las dimensiones de $Im(A)$, $Im(A^T)$ y $Nul(A^T)$.

Solución

De la ecuación del enunciado, se deduce que A^T tiene dimensiones 5×4, por lo que A tiene dimensiones 4×5.
Luego

$$dim(Nul(A)) + dim(Im(A)) = \text{cantidad de columnas de } A$$

$$3 + dim(Im(A)) = 5$$

$$dim(Im(A)) = 2$$

Además

$$dim(Im(A)) = dim(Im(A^T)) = 2$$

Finalmente

$$dim(Nul(A^T)) + dim(Im(A^T)) = \text{cantidad de filas de } A$$

$$dim(Nul(A^T)) + 2 = 4$$

$$dim(Nul(A^T)) = 2$$

3. Sean B_1 y B_2 bases de M_2. Determine la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución

Se busca encontrar $P_{B_2 \leftarrow B_1} = \begin{bmatrix} [b_1]_{B_2} & [b_2]_{B_2} & [b_3]_{B_2} & [b_4]_{B_2} \end{bmatrix}$

- $[b_1]_{B_2}$
  Se debe resolver el sistema

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

  Por lo que $[b_1]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

- $[b_2]_{B_2}$
  Se debe resolver el sistema

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  Por lo que $[b_2]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $[b_3]_{B_2}$
  Se debe resolver el sistema

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

  Por lo que $[b_3]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

- $[b_4]_{B_2}$
  Se debe resolver el sistema

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  Por lo que $[b_4]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Finalmente

$$P_{B_2 \leftarrow B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Sean $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ la matriz de cambio de base de B' a B.

   a) Si $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine $[u]_{B'}$

   b) Determine B'

   c) Si la matriz de cambio de base de B'' a B' es $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, determine la matriz R de cambio de base de B a B''.

Solución

a) Se tiene la propiedad $[u]_B = P[u]_{B'}$.
Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [u]_{B'}$$

Se resuelve el sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finalmente $[u]_B = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Sea $B' = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$.

Por definición $P = \begin{bmatrix} [b'_1]_B & [b'_2]_B & [b'_3]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

- b'_1

$$[b'_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$b'_1 = 1b_1 - 1b_2 + 0b_3 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- b'_2

$$[b'_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$b'_2 = 1b_1 - 2b_2 - 1b_3 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- b'_3

$$[b'_3]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$b'_3 = 2b_1 + 0b_2 + 3b_3 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Se tiene que

$$[u]_B = P[u]_{B'}$$
$$[u]_{B'} = Q[u]_{B''}$$

Entonces

$$[u]_B = PQ[u]_{B''}$$

Por lo que PQ es la matriz de cambio de base de B'' a B.

$$PQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz R de cambio de base de B a B'' será la inversa de la matriz PQ.

$$R = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & -1 \\ 9/2 & 4 & -3 \\ 7/2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Diagonalice la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Solución

- Cálculo de valores propios
  La ecuación característica de A es

$$det(A - \lambda I) = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Se calcula el determinante

$$\begin{aligned} &(3-\lambda)[(6-\lambda)(3-\lambda)-4] + 2[-2(3-\lambda)-8] + 4[-4(6-\lambda)] \\ &= (6-\lambda)(3-\lambda)^2 - 8(3-\lambda) - 16(6-\lambda) - 32 \\ &= (6-\lambda)[(3-\lambda)-16] - 24 + 8\lambda - 32 \\ &= (6-\lambda)(7-\lambda)(\lambda+1) + 8(\lambda-7) \\ &= (\lambda-7)[-\lambda^2 + 5\lambda + 14] \\ &= -(\lambda-7)(\lambda-7)(\lambda+2) \end{aligned}$$

Entonces $\lambda_1 = -2$ con multiplicidad 1 y $\lambda_2 = 7$ con multiplicidad 2. Esto quiere decir que se debe encontrar 1 vector propio asociado a λ_1 y 2 vectores propios asociados a λ_2 para poder diagonalizar la matriz. Equivalentemente, la dimensión del espacio propio de λ_1 debe ser 1 y la dimensión del espacio propio de λ_2 debe ser 2.

- Cálculo de vectores propios

(i) $\lambda_1 = -2$

Se resuelve el sistema $(A - \lambda_1 I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 3-(-2) & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 6-(-2) & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3-(-2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la primera fila: $x_1 = -x_3$

De la segunda fila: $x_2 = -x_3/2$

Usando estas relaciones:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3/2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces el espacio propio asociado a λ_1 es $E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado a λ_1.

(ii) $\lambda_2 = 7$

Se resuelve el sistema $(A - \lambda_2 I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 3-7 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 6-7 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3-7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la primera fila: $x_2 = -2x_1 + 2x_3$

Usando esta relación:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces el espacio propio asociado a λ_2 es $E_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Además $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores propios asociados a λ_2.

- Diagonalización
  Se busca escribir la matriz A como producto de una matriz P invertible y una matriz diagonal D, tal que $A = PDP^{-1}$.
  La diagonal de D corresponde a los valores propios y las columnas de P corresponden a los vectores propios. Debe haber una correspondencia entre la posición de un valor propio y su vector propio asociado. Es decir, si λ_1 se encuentra en la columna 1 de D, su vector propio asociado v_1 debe estar en la columna 1 de P. Además, en el caso que un valor propio tenga más de un vector propio asociado, estos deben ir en columnas adjacentes de P.
  Con ello, una diagonalización de A es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

6. Sea A una matriz de 3×3 tal que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ y la forma escalonada reducida de A es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Determine si A es diagonalizable y si lo es encuentre su diagonalización.

   Solución

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   Por lo que $\lambda_1 = 2$ es un valor propio de A cuyo vector propio asociado es $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   De la forma escalonada reducida de A se observa que A no es invertible, por lo que tiene $\lambda_2 = 0$ como valor propio. Se busca entonces una base para $Nul(A)$.
   De la forma escalonada reducida $x_1 = x_3$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2$$

   Entonces $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son dos vectores propios asociados a $\lambda_2 = 0$.
   A es de 3×3, por lo que para ser diagonalizable debe tener 3 vectores propios linealmente independientes. v_1, v_2 y v_3 son L.I., por ende A es diagonalizable y una

diagonalización es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

7. Demuestre que, independiente de los valores de a, b y c, si λ es valor propio de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{bmatrix}$$

entonces $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ es vector propio de A asociado a λ.

Solución

Con los datos del enunciado

$$Av = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ -a - b\lambda - c\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Se busca demostrar que $Av = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ -a - b\lambda - c\lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

La ecuación característica de A es

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a & -b & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda[\lambda(c + \lambda) + b] - a = 0$$

$$-\lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda - a = 0$$

$$\lambda^3 = -a - b\lambda - c\lambda^2$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ -a - b\lambda - c\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Con lo que se cumple $A \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ y se demuestra lo pedido.

8. V o F

   a) Si A es una matriz tal que $A^2 = I$, entonces 1 es valor propio de A.

   b) Sea A cuadrada. A y A^t tienen los mismos valores propios.

   c) Si A es diagonalizable y B es similar a A entonces B es diagonalizable.

   Solución

   a)

$$Av = \lambda v$$
$$AAv = A\lambda v$$
$$Iv = \lambda Av$$
$$v = \lambda^2 v$$

   Entonces $\lambda^2 = 1$, por lo que $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. Para todos los casos excepto cuando $A = [-1]$, la afirmación es VERDADERA.

   b) Como A es cuadrada, su diagonal es igual a la diagonal de A^T.
   Además por propiedades de los determinantes, $det(A) = det(A^T)$.
   Entonces $det(A - \lambda I) = det(A^T - \lambda I)$, por lo que la afirmación es VERDADERA.

   c) Si B es similar a A, existe una matriz invertible Q tal que $B = QAQ^{-1}$.
   Si A es diagonalizable se puede escribir como $A = PDP^{-1}$.
   Entonces

$$B = Q(PDP^{-1})Q^{-1} = (QP)D(QP)^{-1}$$

   Es decir, B es diagonalizable, por lo que la afirmación es VERDADERA.

9. Sea A matriz cuadrada y $B = A^2 + I$. (A13)

   a) Demuestre que si λ es valor propio de A entonces $\lambda^2 + 1$ es valor propio de B.

   b) Demuestre que si A es diagonalizable entonces B también lo es.

   Solución

   a)

$$Av = \lambda v$$
$$AAv = A\lambda v$$
$$A^2 v = \lambda^2 v$$

Es decir, si λ es valor propio de A, λ^2 es valor propio de A^2.
Luego, si se cumple que $det(B-(\lambda^2+1)I)=0$ significa que λ^2+1 es valor propio de B.

$$det(B-(\lambda^2+1)I) = det((A^2+I)-(\lambda^2+1)I)$$

$$= det(A^2+I-\lambda^2 I+I)$$

$$= det(A^2-\lambda^2 I)$$

Como λ^2 es valor propio de A^2, $det(A^2-\lambda^2 I)=0$.
Por lo tanto $det(B-(\lambda^2+1)I)=0$ y se demuestra lo pedido.

b) Si A es diagonalizable, entonces A se puede escribir como $A=PDP^{-1}$ con D diagonal.
Luego

$$B = A^2+I$$

$$= (PDP^{-1})(PDP^{-1})+I$$

$$= PDDP^{-1}+PP^{-1}$$

$$= P(D^2+I)P^{-1}$$

La matriz D^2+I es diagonal, por lo que B puede ser escrita como producto de una matriz invertible y una matriz diagonal. Finalmente, B es diagonalizable.