EXAMEN – ÁLGEBRA LINEAL

1. En un sistema lineal homogéneo ¿cuál de las siguientes afirmaciones siempre son correctas?

   I. El sistema siempre es consistente.

   II. El sistema siempre tiene infinitas soluciones.

   III. Si u y v son soluciones entonces $u+v$ también es solución.

   A) Sólo I.

   B) Sólo II.

   C) II y III.

   D) I y III.

2. Sea $W = \{p(x) \in P_2 : 2p(0) + p(1) = 0\}$ subespacio de P_2 (polinomios con coeficientes reales de grado a lo más 2). Sea $T : P_2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ 2p(0)+p(1) \end{pmatrix}$. Bases de W y $T(W)$, respectivamente, son:

   A) $B_W = \{-x^2 + x, -3x^2 + 1\}$, $B_{T(W)} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

   B) $B_W = \{-x^2 + x\}$, $B_{T(W)} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

   C) $B_W = \{-x^2 + x, -3x^2 + 1\}$, $B_{T(W)} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

   D) $B_W = \{-x^2 + x\}$, $B_{T(W)} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

3. ¿Para qué valores de h la matriz aumentada $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ h & 6 & -2 \end{pmatrix}$ representa un sistema lineal consistente?

   A) Sólo para $h = 0$.

   B) Sólo para $h = 1$.

   C) No existen valores para h.

   D) Para infinitos valores de h.

4. El conjunto $Gen\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ es equivalente a cuáles de los siguientes conjuntos

I. $Gen\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

II. $Gen\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

III. $Gen\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

A) Solo I.

B) I y III.

C) I, II y III.

D) Ninguno de los anteriores.

5. Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA con respecto a una matriz cuadrada A:

A) El método de Cramer se aplica al sistema $AX = b$ únicamente si la matriz A es invertible.

B) La matriz adjunta $Adj(A)$ es la única matriz tal que $A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = det(A)I$.

C) La matriz adjunta corresponde a la matriz de cofactores de A transpuesta.

D) $det(Adj(A)) = det(A)$.

6. Si $\Delta = \begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix}$ y $\Delta_1 = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\yz & xz & xy\\x & y & z\end{vmatrix}$, ¿cuál es valor de $\Delta + \Delta_1$?

A) $-x^2yz$.

B) xyz.

C) 0.

D) No se puede calcular.

7. ¿Cuál de las siguientes matrices NO es diagonalizable?

A) $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$.

B) $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$.

C) $\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}$.

D) $\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & -1\end{bmatrix}$.

8. La factorización LU de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}$ es?

A) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

B) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

C) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

D) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

9. La matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ es

A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

C) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal tal que $T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces su matriz representante estándar es

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

C) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

D) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Sea V el espacio vectorial de las matrices de 2×2 y A una matriz de V. ¿Cuál de los siguientes conjuntos es siempre linealmente dependiente?

A) $\{A, A^2, A^3, A^4\}$.

B) $\{A, -A^2, A^3, -A^4\}$.

C) $\{A, A^T\}$.

D) $\{A, A^2, A^3, A^4, A^5\}$.

12. Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ si $[x]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Entonces x escrito en la base canonica de $\mathbb{R}^2$ es:

A) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

13. ¿Para qué valor de a y b el vector $v = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ es perpendicular a los vectores $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

A) $a = 1, b = 1$.

B) $a = 0, b = 1$.

C) $a = 0, b = -1$.

D) $a = -1, b = 0$.

14. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$. Una base para $Nul(A)$ (Núcleo de A) es

A) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

B) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

C) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

D) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

15. Sea L la recta definida por $L : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R$. Entonces el punto de intersección de L con el plano de ecuación $x + y + z = 4$ es

A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

C) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

16. La única solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ 2x - y + z &= -1 \\ y - z &= 2 \end{aligned}$$

es

A) $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

B) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1/2$.

C) $x = 2$, $y = 1/2$, $z = 2$.

D) $x = 1/2$, $y = 3$, $z = 1$.

17. Determine cúal de las siguientes afirmaciones son verdaderas

I. Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal entonces T no es sobreyectiva.

II. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal entonces T no es sobreyectiva.

III. Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal entonces T no es inyectiva.

A) Sólo III

B) I y III.

C) II y III.

D) I, II y III.

18. Sea A una matriz de 3×3 y u un vector no nulo tal que $Au = 4u$. ¿De cuál de las siguientes matrices u NO siempre es un vector propio?

A) A^2.

B) $3A$.

C) A^T.

D) $A + I$.

19. Determine cuál o cuáles de estos conjuntos es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_3$

I. $\{p(x) \in \mathbb{P}_3 \mid p(x) = ax^3 \text{ con } a \in \mathbb{R}\}$

II. $\{p(x) \in \mathbb{P}_3 \mid p(0) = 0\}$

III. $\{p(x) \in \mathbb{P}_3 \mid p(x) = a + x^3 \text{ con } a \in \mathbb{R}\}$

A) I y II.

B) II y III.

C) I y III

D) Solo III.

20. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdaderas?

I) Si A y B son matrices similares entonces tienen el mismo polinomio característico.

II) Si dos matrices tiene el mismo polinomio característico entonces son similares.

A) Sólo I.

B) Sólo II.

C) Ambas, I y II.

D) Ninguna.

21. ¿Cuál de estas matrices pertenece al núcleo de la transformación lineal $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definida por $T(A) = A + A^T$?

A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

22. Si A es una matriz de 2×2 cuyo polinomio característico es $P_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son siempre verdadera(s)?

I. A es diagonlizable.

II. A NO es invertible.

A) Sólo I.

B) Sólo II.

C) Ambas I y II .

D) Ninguno de los anteriores.