PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 9: Transformaciones lineales

1. Considere la transformación lineal T definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, encuentre un vector $\mathbf{x}$ cuya imagen bajo T sea $\mathbf{b}$, y analice si $\mathbf{x}$ es único.

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -7 \\ -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

2. Encuentre todos los vectores $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^4$ que son mapeados en el vector cero por la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

   Sea $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. ¿$\mathbf{b}$ está en el rango de la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$? ¿Por qué?

3. Encuentre todos los vectores $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^4$ que son mapeados en el vector cero por la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

   Sea $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. ¿$\mathbf{b}$ está en el rango de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$? ¿Por qué?

4. Sean $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que mapea $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{y}_1$, y $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{y}_2$. Encuentre las imágenes de $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

5. Sean $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que mapea $\mathbf{x}$ en $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2$. Encuentre una matriz A tal que $T(\mathbf{x})$ sea $A\mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x}$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^4$. Explique por qué el conjunto $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_n)\}$ es linealmente dependiente.

7. Demuestre que la transformación T definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2|x_2|, x_1 - 4x_2)$ no es lineal.

8. Demuestre que la transformación T definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 - 3, 2x_1 - 5x_2)$ no es lineal.

9. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Supong que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es un conjunto linealmente independiente, pero $\{T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Demuestre que $T(\mathbf{x}) = 0$ tiene una solución no trivial.

10. Suponga que T es una transformación lineal. Encuentre la matriz estándar de T.

    a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{e}_1) = (3, 1, 3, 1)$ y $T(\mathbf{e}_3) = (-5, 2, 0, 0)$, donde $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

    b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación de trasquilado vertical que mapea $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, pero deja inalterado a $\mathbf{e}_2$.

    c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hace girar a los puntos (en torno al origen) a través de un ángulo de $\pi/2$ radianes (en sentido horario).

    d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ primero hace girar puntos a través de $-3\pi/4$ radianes (en el sentido horario) y después los refleja a través del eje horizontal x_1. [*Sugerencia.* Considere que $T(\mathbf{e}_1) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.]

    e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ primero refleja los puntos a través del eje horizontal x_1 y luego los hace girar $-\pi/2$ radianes.

11. Llene las entradas faltantes de la matriz, suponiendo que la ecuación es válida para todos los valores de las variables

    a) $\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 \\ x_1 - x_3 \\ -x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$

    b) $\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

12. Demuestre T es una transformación lineal encontrando una matrix que implemente el mapeo. Observe que $x_1, x_2, \ldots$ no son vectores, sino entradas en vectores.

    a) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2, 0, 2x_2 + x_4, x_2 - x_4)$

    b) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3)$

13. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 4x_1 + 5x_2)$. Encuentre $\mathbf{x}$ tal que $T(\mathbf{x}) = (3, 8)$.

14. Sea T la transformación lineal cuya matriz estándar se presenta.

    a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -5 \\ 8 & 3 & -3 \\ 2 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

    b) $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 3 & 7 \\ 6 & -8 & 5 & 12 \\ -7 & 10 & -8 & -9 \\ 3 & -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

    Determine:

    a) Si T es un mapeo uno a uno.

    b) Si T es un mapeo sobreyectivo.