PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Ayudantía 7 - MAT1203

1. Encuentre la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, si existe.

   Solución:

   $$[A \,|\, I] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Operación: $F_2 \to F_2 + F_1$, $F_3 \to F_3 - 5F_1$

   $$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Operación: $F_3 \to F_3 - 2F_2$

   $$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Así, A no tiene inversa.

2. Resuelva la ecuación matricial

   $$A^{-1}(BX)^{-1} = \left(A^{-1}B^3\right)^2$$

   Solución: Expandimos:

   $$A^{-1}(BX)^{-1} = A^{-1}B^3A^{-1}B^3$$
   $$(BX)^{-1} = B^3A^{-1}B^3 \quad \Rightarrow \quad BX = (B^3A^{-1}B^3)^{-1} = B^{-3}AB^{-3}$$
   $$X = B^{-4}AB^{-3}$$

3. Sea

   $$A = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Encuentre la tercera columna de A^{-1} sin calcular las otras.

Solución: Resolver $Ax = e_3$. La matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 & 0 \\ 2 & 15 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Operaciones fila $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$3^{\text{a}} \text{ columna de } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. Escriba la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

como producto de matrices elementales.

Solución: Al reducir A a I, se obtiene

$$A^{-1} = E_4 E_3 E_2 E_1$$

con

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Considere $T(x_1, x_2) = (-5x_1 + 9x_2,\ 4x_1 - 7x_2)$.

a) La matriz asociada es

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

b) $\det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow T$ es invertible.

c) Usando la fórmula de la inversa de 2×2:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(y_1, y_2) = (7y_1 + 9y_2,\ 4y_1 + 5y_2)$$

6. Demuestre que:

a) Si $AD = I_n$, entonces $DA = I_n$.
b) Si A es $n \times n$ con columnas l.i., entonces las columnas de A^2 generan $\mathbb{R}^n$.

Solución:

a) $AD = I \implies ADA = A \implies A(DA) = A \implies DA = I$.

b) Como A tiene columnas l.i., es invertible. El producto $A^2 = AA$ también es invertible, por lo tanto sus columnas generan $\mathbb{R}^n$.