PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Ayudantía 13 - MAT1203

1. Determine una base ortonormal para el espacio columna de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   Luego, determine la factorización QR de la matriz.

   sol:
   Sean las columnas de la matriz v_1, v_2, v_3, aplicamos Gram–Schmidt:

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{\|u_1\|^2}\, u_1 = v_2 - \big(-1\big)u_1 = v_2 + u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{\|u_1\|^2}\, u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{\|u_2\|^2}\, u_2$$

$$= v_3 - 4\, u_1 + \tfrac{1}{3}\, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal de $\mathrm{Col}(A)$. La factorización $A = QR$ se obtiene con

$$Q = \big[e_1\ e_2\ e_3\big], \quad R = Q^T A$$

Entonces obtenemos:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} e_1 \cdot v_1 & e_1 \cdot v_2 & e_1 \cdot v_3 \\ e_2 \cdot v_1 & e_2 \cdot v_2 & e_2 \cdot v_3 \\ e_3 \cdot v_1 & e_3 \cdot v_2 & e_3 \cdot v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Encuentre una solución de mínimos cuadrados y el error de mínimos cuadrados de $Ax = b$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sol:
Las ecuaciones normales son

$$A^T A = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo,

$$\begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{11}{42}, \quad x_2 = \frac{23}{42}$$

El error al cuadrado es

$$\|Ax - b\|^2 = \left(\frac{2}{42}\right)^2 + \left(\frac{4}{42}\right)^2 + \left(\frac{-8}{42}\right)^2 = \frac{1}{21}$$

3. Determine la recta de mínimos cuadrados (recta de regresión) que mejor se ajuste a los puntos $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 2)$.

sol:
Queremos llegar a una recta de la forma $y = a + bx$

Tenemos los puntos: $(0,1),(1,1),(2,2),(3,2)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones normales $A^T Ax = A^T b$, donde

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

con solución

$$a = \frac{9}{10}, \quad b = \frac{2}{5}$$

Luego la recta es

$$y = \frac{9}{10} + \frac{2}{5}x$$

4. Considere el plano

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

   (a) Determine una base ortonormal de W.

   (b) Encuentre el vector de W más cercano al vector $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   sol:

   (a) Gram–Schmidt:

$$u_1 = (1,2,0), \qquad e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$$

$$u_2 = (2,3,1) - \frac{8}{5}(1,2,0) = (2/5, -1/5, 1), \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,5)$$

   Por lo tanto, $\{e_1, e_2\}$ es ortonormal en W

   (b) Dado un vector cualquiera $x \in \mathbb{R}^n$, su proyección ortogonal sobre $W = \text{Gen}\{e_1, \ldots, e_k\}$ está dada por:

$$\text{proj}_W(x) \; = \; \sum_{i=1}^{k} (x \cdot e_i) e_i$$

Entonces, dado un vector $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Su proyección en W:

$$\begin{aligned} \text{proj}_W(y) &= (y \cdot e_1)e_1 + (y \cdot e_2)e_2 \\ &= \frac{1}{5}(1, 2, 0) + \frac{7}{30}(2, -1, 5) \\ &= \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{7}{6}\right) \end{aligned}$$