1. Si 5 es valor propio de una matriz A, entonces 10 es valor propio de A^2.

Sol: $\Rightarrow$ existe un $\vec{v}$

$$A\vec{v} = 5\vec{v} \quad / A.$$

$$A^2\vec{v} = A5\vec{v}$$

$$= 5A\vec{v}$$

$$= 25\vec{v}$$

$\Rightarrow$ 25 Valor Propio

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 5 \text{ Valor Propio}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 25 \; 5 \; 1 \text{ son Valores propios (el 10 no)}$$

Falso

2. Si A es una matriz tal que $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$, entonces existe $u\neq\vec{0}$ tal que $A^Tu=3u$.

Sol: Verdadero

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow 3 \text{ es valor propio}$$

$$|A-3I|=0$$

$|A|=|A^T|$

$$|(A-3I)^T|=0$$

$$|A^T-3I^T|=0$$

$$|A^T-3I|=0$$

$\Rightarrow$ 3 es valor propio de A^T

existe $\vec{u}\neq 0$ tal que

$$A^T\vec{u}=3\vec{u}$$

3. Si 3 es valor propio de A, entonces 9 es valor propio de A^2.

Sol: Verdadero

$\exists \vec{v} \neq 0$ tal que

$$A\vec{v} = 3\vec{v} \quad / A.$$

$$A^2\vec{v} = A3\vec{v}$$

$$= 3A\vec{v}$$

$$= 3(3\vec{v})$$

$$= 9\vec{v}$$

$\Rightarrow$ 9 es valor propio

☑

4. Si 4 es valor propio de A^2, entonces 2 es valor propio de A.

Sol: Falso

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -2 \text{ y } 1 \text{ son V.P.}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 4 \text{ y } 1 \text{ son V.P.}$$

$\rightarrow$ Falso ☒

5. Si α es valor propio de una matriz A no invertibe, entonces $\alpha = 0$.

Sol: Falso

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ => No es invertible $|A| = 0$

$\Downarrow$

1 es vp.

Si $\lambda = 1$ λ es vp. A (no invertible)

$\Rightarrow \lambda \neq 0$



6. Si A es una matriz de 2×2 con valores propios 5 y 7, entonces la suma de las multiplicidad geométrica de 5 y 7 es 2.

Sol: Verdadero

A es de 2x2

$1 \leq mg \leq ma \leq 2$ para el 5 y 7

Como 5 y 7 son Vp.

$$\det(A - \lambda I) = K(\lambda - 5)(\lambda - 7)$$

$K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ ma del 5 es 1

ma del 7 es 1

$1 \leq mg \leq ma = 1$

$1 \leq mg \leq 1 \Rightarrow mg = 1$

$\Rightarrow$ mg del 5 es 1

$\Rightarrow$ mg del 7 es 1

$1 + 1 = 2$

7. Si A es una matriz de 3×3 con valores propios 5 y 7, entonces la suma de las multiplicidad geométrica de 5 y 7 es 3.

Sol: Falso

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A - \lambda I| = (5-\lambda)^2 (7-\lambda)$$

$$\Rightarrow ma(5) = 2$$

$$ma(7) = 1$$

$$Nul(A - 5I) = Nul \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow mg(5) = 1$$

$$Nul(A - 7I) = Nul \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= Gen \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow mg(7) = 1$$

$$1 + 1 = 2 \neq 3$$

8. Sea A de 4×4 y $u, v, w \in \mathbb{R}^4$ vectores no nulos. Si $Au = u$,$Av = -3v$ y $Aw = 5w$, entonces $\{u, v, w\}$ es L.I.

Sol: Por contradicción suponemos que $\{u, v, w\}$ es LD

$\Rightarrow w = \alpha u + \beta v$

$u = Kv$ en stand-by

$$Aw = A(\alpha u + \beta v)$$

$$5w = \alpha Au + \beta Av$$

$$5(\alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta(-3v)$$

$$5\alpha u + 5\beta v = \alpha u - 3\beta v$$

$$4\alpha u = -8\beta v$$

$$\alpha u = -2\beta v$$

Si $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \vec{w} = \vec{0}$ $\rightarrow\leftarrow$

Si $\alpha \neq 0 \Rightarrow u = \frac{-2\beta}{\alpha} v$

$K = \frac{-2\beta}{\alpha}$

$$u = Kv$$

$$A\vec{u} = \vec{u}$$

$$A(kv) = kv$$

$$kAv = kv$$

$$k(3v) = kv$$

$$-3kv = kv$$

$$\vec{0} = 4k\vec{v}$$

$$\Rightarrow k = 0$$

$$\Rightarrow \vec{u} = kv = \vec{0}$$

$$\rightarrow \leftarrow$$

$$\{u, v, w\} \; LI$$