Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2022

Álgebra Lineal - MAT1203
Guía 8

Problemas mínimos

1. Determine cuál de los siguientes conjuntos corresponde a un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{P}$ de polinomios de coeficientes reales. En caso de ser subespacio, determine generadores.

   (a) Todos los polinomios de la forma $\mathbf{p}(t) = at^2$ donde a es un número real fijo.

   (b) Todos los polinomios de la forma $\mathbf{p}(t) = a + t^2$, donde a es un número real fijo.

   (c) Todos los polinomios de grado a lo más 3, con números enteros como coeficientes.

   (d) Todos los polinomios $p(t)$ de grado a lo más 3 tales que $p(2) = 0$ y $p'(1) = 0$ (donde p' significa derivada).

2. Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma indicada a continuación. Determine si W es un espacio vectorial o no. En caso afirmativo encuentre generadores y en caso contrario justifique porqué no es.

   (a) $\begin{bmatrix} 2a+3b \\ -1 \\ 2a-5b \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3a-5b \\ 3b+2a \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2a-b \\ 3b-c \\ 3c-a \\ 3b \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4a+3b \\ 0 \\ a+3b+c \\ 3b-2c \end{bmatrix}$

3. Defina una transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ mediante $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix}$. Determine un polinomios $p(t)$ en $\mathbb{P}_2$ que genere el núcleo de T, y describa el rango de T.

4. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Suponga que A es equivalente por filas a B. Encuentre las bases de $\operatorname{Nul} A$, $\operatorname{Col} A$ y $\operatorname{Fil} A$.

5. Considere los polinomios $\mathbf{p}_1(t) = 1 + t^2$ y $\mathbf{p}_2(t) = 1 - t^2$. ¿Es $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{P}_3$? ¿Por qué?

Problemas adicionales

6. Sea $M_{2\times2}$ el espacio vectorial de todas las matrices de 2×2, y defina $T : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$ mediante $T(A) = A + A^T$, donde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
   (a) Demuestre que T es una transformación lineal.
   (b) Sea B cualquier elemento de $M_{2\times2}$ tal que $B^{\mathrm{T}} = B$. Determine una A en $M_{2\times2}$ tal que $T(A) = B$.
   (c) Demuestre que el rango de T es el conjunto de B en $M_{2\times2}$ con la propiedad de que $B^{\mathrm{T}} = B$.
   (d) Describa el núcleo de T.
7. Demuestre que la intersección de subespacios vectoriales es nuevamente un subespacio vectorial, pero esto no se cumple con la unión de espacios.
8. Determine si los siguientes conjuntos de matrices son subespacios vectoriales del espacio de matrices de 2×2 de entradas reales:
   (a) Las matrices simétricas.
   (b) Las matrices de determinante 0.

Soluciones

- Problema 1: Lay, página A33, Sección 4.1, Ejercicio 5 (ítem (a)), Ejercicio 7 (ítem (c))
- Problema 2: Lay, página A33, Sección 4.1, Ejercicio 15 (ítem (a)) y Ejercicio 17 (ítem (c)).
- Problema 3: Lay, página A34, Sección 4.2, Ejercicio 31.
- Problema 4: Lay, página A34, Sección 4.3, Ejercicio 13.
- Problema 5: Lay, página A34, Sección 4.3, Ejercicio 33.
- Problema 6: Lay, página A34, Sección 4.2, Ejercicio 33.
- Problema 8: (a): Si es subespacio. (b) No es subespacio.