PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Solución Ayudantía 1 - MAT1203

Pregunta 1

(a)

$$u + 3v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 3 \cdot 2 \\ 2 + 3 \cdot 0 \\ -3 + 3 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

(b)

$$u \cdot v = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) = 5$$

(c)

El vector que buscamos es $\frac{3}{||u||}u$. Calculamos primero la norma de u:

$$||u|| = \left|\left| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right|\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

Entonces:

$$\frac{3}{||u||}u = \frac{3}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{6}{\sqrt{14}} \\ \frac{-9}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$

(d)

Usamos que:

$$u \cdot v = ||u||\ ||v|| \cos\theta$$

Buscamos θ. Ya conocemos $u \cdot v$ y $|u|$ por (b) y (c), calculamos $|v|$:

$$||v|| = \left|\left| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right|\right| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

Ahora manipulando la identidad original tenemos que:

$$\theta = \arccos \frac{u \cdot v}{||u||\ ||v||} = \arccos \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{5}} = \arccos \sqrt{\frac{5}{14}} \approx 53,3$$

Pregunta 2

Llamemos $A = (4, 3, -1)$ y $B = (1, 2, 3)$. Para la ecuación vectorial de la recta necesitamos un punto perteneciente a la recta (vector posición) y un vector director. Para el punto podemos usar A o B, y para el vector director podemos usar $\overline{BA} = (A - B)$ o $\overline{AB} = (B - A)$. Una opción es:

$$L_1 : A + (A - B)t = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4-1 \\ 3-2 \\ -1-3 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} t$$

Pregunta 3

Podemos calcular la ecuación vectorial del plano. Para esto necesitamos un vector posición y dos vectores directores. Siendo $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, -1)$, $C = (1, 3, -2)$ podemos elegir A como vector posición, y tomar $\overline{BA} = (A-B)$ y $\overline{CA} = (A-C)$ como directores (Es posible tomar otros directores, pero hay que asegurarse que no sean paralelos los dos que se usen). Entonces:

$$P_1 : A + (A - B)t + (A - C)s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} s$$

Pregunta 4

Solución 1: Tomamos la ecuación y la igualamos a un parametro que llamaremos $t = x = 2y = 3z$. Separamos esto en tres ecuaciones y tenemos:

$$\begin{cases} t = x \\ t = 2y \\ t = 3z \end{cases}$$

Despejamos el vector (x, y, z) y tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Lo cual es la ecuación vectorial de la recta! Para convertir esto en un plano, es suficiente agregar otro vector director para incluir al punto $A = (1, -1, 1)$. Por ejemplo, $\overline{CA} = C - A$:

$$P_1 : \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} t + (C - A)s = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} s$$

Solución alternativa: Podemos aprovechar la ecuación $x = 2y = 3z$ para obtener puntos de forma "gratis". Digamos, por ejemplo, que $x = 6$. Por la ecuación, sabemos que necesariamente $y = 3$ y $z = 2$. Entonces tenemos un nuevo punto $B = (6, 3, 2)$. Si repetimos con $x = 0$, tenemos que $y = 0$ y $z = 0$, obteniendo el punto $C = (0, 0, 0)$. Si a esto le agregamos el punto que nos da el enunciado, $A = (1, -1, 1)$, tenemos tres puntos que podemos usar para construir nuestra ecuación de plano.

Podemos elegir, por ejemplo, como vectores directores $\overline{AB} = B - A$ y $\overline{AC} = C - A$ y como vector posición A. En ese caso, nos quedaría:

$$P_1 : A + (B - A)t + (C - A)s = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} s$$

Notar que las dos soluciones no necesariamente nos dan la misma ecuación de plano, a pesar de que describen el mismo plano. Recordar que siempre existen varias (infinitas) formas de escribir la ecuación de un plano o una recta.

Pregunta 5

$$\begin{cases} 5x - 2y - 2z = 1 \\ 4x + \ y + \ z = 6 \end{cases}$$

Notemos que es posible despejar x si sumamos las ecuaciones de forma inteligente. Podemos tomar la primera ecuación y sumarle 2 veces la segunda, obtenemos:

$$5x + 8x - 2y + 2y - 2z + 2z = 1 + 12$$

$$13x = 13$$

$$x = 1$$

Reemplazando en la segunda ecuación tenemos:

$$y + z = 6 - 4 = 2$$

$$y = 2 - z$$

Entonces podemos escribir la ecuación de la recta en terminos de z:

$$L_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z$$

(También podríamos haber escrito en terminos de y, también sería correcto).

Pregunta 6

(a)

Para encontrar la intersección, igualamos las ecuaciones de recta:

$$\begin{bmatrix} 1 + t \\ 3 - t \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + s \\ 2 + s \\ 5 - s \end{bmatrix}$$

Aquí podemos despejar valores de t y s usando el metodo que querramos. Notamos que la última ecuación nos dice que $2 = 5 - s$, por lo que $s = 3$. Ahora podemos simplemente reemplazar $s = 3$ en la ecuación de la recta L_2, obteniendo que el punto de intersección p es:

$$p = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(b)

Las dos ecuaciones de recta nos entregan los vectores directores de forma "gratis", y podemos escojer como vector posición el de cualquiera de las dos rectas. Usamos, por ejemplo, el de la recta L_1. Entonces la ecuación sería:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} s$$