Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2020

MAT1203 - Álgebra Lineal
PAUTA Examen

Problema 1.

Sea A una matriz de $n \times m$. Demuestre que $\text{Im}(A^TA) = \text{Im}(A^T)$.

Solución:

Forma 1:

Primero notamos que

$$\begin{aligned} x \in \text{Im}(A^TA) &\Rightarrow \text{Existe } y \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } (A^TA)y = x \\ &\Rightarrow \text{Existe } y \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } A^T(Ay) = x \\ &\Rightarrow \text{Existe } z \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } A^T(z) = x \\ &\Rightarrow x \in \text{Im}(A^T). \end{aligned}$$

Así, $\text{Im}(A^TA) \subset \text{Im}(A^T)$.

Por otro lado, si $x \in \text{Im}(A^T)$ entonces existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^Ty = x$. El vector y admite la descomposición $y = u + v$ donde

$$u \in \text{Col}(A) = \text{Im}(A) \text{ y}$$

$$v \in \text{Col}(A)^\perp = \text{Nul}(A^T).$$

Esto significa que $u = Aw$ para algún $w \in \mathbb{R}^m$ y $A^Tv = \vec{0}$. Así

$$x = A^Ty = A^T(u + v) = A^Tu + A^Tv = A^Tu = A^TAw$$

lo que implica que $x \in \text{Im}(A^TA)$. Por lo tanto $\text{Im}(A^T) \subset \text{Im}(A^TA)$.

Esto demuestra lo pedido.

Puntaje:

- 2 puntos por probar que $\text{Im}(A^TA)$ está contenido en $\text{Im}(A)$.
- 1 punto por escribir que $x = A^Ty$ para algún vector y.
- 1 punto por escribir que $y = u + v$.
- 1 punto por afirmar que $x = A^TAw$ para algún vector w.
- 1 punto por concluir el problema.

Forma 2:

Primero demostramos que $\text{Nul}(A^TA) = \text{Nul}(A)$. Notamos que

$$\begin{aligned} x \in \text{Nul}(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^TAx = A^T0 = 0 \\ \Rightarrow x \in \text{Nul}(A^TA). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $x \in \text{Nul}(A^TA)$ entonces $A^T(Ax) = 0$ por lo que $Ax \in \text{Nul}(A^T) = (\text{Col}(A))^\perp$. Además, $Ax \in \text{Col}(A)$, lo que junto a lo anterior implica que $Ax = 0$ y por lo tanto $x \in \text{Nul(A)}$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \text{Nul}(A^TA) = \text{Nul}(A) &\Longrightarrow (\text{Nul}(A^TA))^\perp = (\text{Nul}(A))^\perp \\ &\Longrightarrow \text{Fil}(A^TA) = \text{Fil}(A) \\ &\Longrightarrow \text{Col}(A^TA) = \text{Col}(A^T) \\ &\Longrightarrow \text{Im}(A^TA) = \text{Im}(A^T) \end{aligned}$$

Puntaje:

- 2 puntos por afirmar que $\text{Nul}(A^TA) = \text{Nul}(A)$ (no es necesario demostrar).
- 1 punto por escribir la igualdad de los complementos ortogonales.
- 1 punto por escribir la igualdad de los espacios fila.
- 1 punto por escribir la igual de los espacios columnas.
- 1 punto por concluir el problema.

Problema 2.

Calcule la descomposición en valores singulares de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución:
Buscamos dos matrices ortogonales V y U y una matriz diagonal Σ tales que

$$A = V\Sigma U^T.$$

Calculamos A^TA:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Sus valores propios son:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow |2-\lambda| = 2 \Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

Por lo que el único valor singular de A es $\sigma_1 = \sqrt{4} = 2$ y

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los espacios propios de A^TA son

$$E(4) = \text{Nul} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E(0) = \text{Nul} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ vectores propios de A^TA la forman los vectores $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ y $u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ y así

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal. Por otro lado, definimos

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A u_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una base ortonormal de $(\operatorname{Gen} v_1)^\perp$ es $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ por lo que

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal. De esta forma

$$A = V\Sigma U^T.$$

Observación: La solución también es correcta si se definen las matrices U y V al revés, es decir, de manera tal que $A = U\Sigma V^T$. De igual forma, si se considera al valor $\sigma_2 = 0$ como un valor singular también se acepta.

Puntaje:

- 2 puntos por determinar correctamente la matriz Σ.
- 2 puntos por determinar correctamente una matriz V.
- 2 puntos por determinar correctamente una matriz U.

Problema 3.

Considere números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$ y vectores no nulos $u, v \in \mathbb{R}^2$.

a) Establezca condiciones sobre u y v para que exista una matriz A de 2×2 tal que $Au = \alpha u$ y $Av = \beta v$.

b) ¿Es única la matriz del ítem anterior?

Solución:

a) Buscamos una matriz de 2×2 que tenga a u y v como vectores propios asociados a los valores propios α y β respectivamente. Ya que A tiene dos valores propios distintos, entonces es diagonalizable. Basta definir

$$A = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^{-1}$$

donde u y v deben ser linealmente independientes para que la matriz $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$ sea invertible.

Si u y v son LD entonces la matriz A no puede existir ya que vectores propios asociados a valores propios distintos deben ser LI.

b) Sí, es única. Supongamos que además existe una matrix B tal que $Bu = \alpha u$ y $Bv = \beta v$. Entonces $(B - A)u = \vec{0}$ y $(B - A)v = \vec{0}$. Como $\{u, v\}$ debe ser una base de $\mathbb{R}^2$ entonces $B - A = 0$, o equivalentemente $B = A$.

Puntaje:

- 2 puntos por justificar que A existe si u y v son l.i.
- 2 punto por justificar que A no existe si u y v son l.d.
- 2 puntos por justificar correctamente la unicidad de la matriz A.

Problema 4.

Determine si existen α y β tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 0 & \beta & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

sea ortogonalmente diagonalizable, es decir $A = QDQ^T$ donde Q es matriz ortogonal y D diagonal.

Solución:

Notamos que QDQ^T define una matriz simétrica ya que $(QDQ^T)^T = QDQ^T$, pero A no es simétrica para ningún valor de α ni β. Por lo tanto no existen α y β tal que A sea ortogonalmente diagonalizable.

Puntaje:

- 3 puntos por afirmar que A no es simétrica para ningún valor de α y β.
- 3 puntos por afirmar que A no es ortogonalmente diagonalizable para ningún valor de α y β.

Problema 5.

Determine la ecuación de la recta de mínimos cuadrados $y = mx + n$ que pase más cerca de los puntos $(1, 1)$, $(2, 3)$ y $(3, 4)$.

Solución:

Para encontrar la ecuación de la recta debemos calcular

$$\min_{m,n\in\mathbb{R}} \left|\left| \begin{bmatrix} m+n-1 \\ 2m+n-3 \\ 3m+n-4 \end{bmatrix} \right|\right| = \min_{m,n\in\mathbb{R}} \left|\left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right|\right|.$$

Para esto encontramos una solución de mínimos cuadrados de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} A^T A \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} &= A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 19 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad (2) \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta buscada es $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$.

Puntaje:

- 2 puntos por plantear correctamente el sistema (1).
- 2 puntos por plantear correctamente el sistema (2).
- 1 puntos por determinar correctamente el valor de m.
- 1 puntos por determinar correctamente el valor de n.

Problema 6.

Considere el espacio $\mathbb{P}_2$ y $\mathcal{B} = \{1+x, -x, x^2\}$ una base de $\mathbb{P}_2$. Si $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ es una transformación lineal tal que para cada $p \in \mathbb{P}_2$ se cumple

$$[T(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} [p]_{\mathcal{B}}$$

determine una forma explícita para $T(p(x))$.

Solución:

Sea $p(x) = a + bx + cx^2$ un polinomio de $\mathbb{P}_2$. Notamos que

$$p(x) = a(1+x) + (a-b)(-x) + cx^2$$

por lo que $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ a-b \\ c \end{bmatrix}$. Así,

$$[T(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a-b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ a-b \\ 2a+c \end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= (a+c)(1+x) + (a-b)(-x) + (2a+c)x^2 \\ &= (a+c) + (b+c)x + (2a+c)x^2. \end{aligned}$$

Puntaje:

- 2 puntos por determinar el vector de coordenadas de p.
- 2 puntos por determinar el vector de coordenadas de $T(p)$.
- 2 puntos por determinar correctamente $T(p(x))$.

Problema 7.

Responda justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si A es una matriz de $n \times m$ inyectiva, entonces existe una matriz B tal que $BA = I$.

b) Para cada $a > 1$, la matriz $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a^2 \end{bmatrix}$ es positiva definida.

Solución:

a) Verdadero.

Forma 1:

A de $n \times m$ inyectiva
$\Rightarrow$ Las columnas de A son L.I.
$\Rightarrow$ Las filas de A^T son L.I.
$\Rightarrow$ A^T es sobreyectiva
$\Rightarrow$ Para cada $j \in \{1, ..., m\}$, el sistema $A^T x = e_j$ tiene al menos una solución v_j
$\Rightarrow$ La matriz $C = \begin{bmatrix} v_1 & ... & v_m \end{bmatrix}$ es tal que $A^T C = I$
$\Rightarrow$ La matriz $B = C^T$ es tal que $BA = I$.

Forma 2:

A de $n \times m$ inyectiva $\Rightarrow A^TA$ es positiva definida
$\Rightarrow A^TA$ es invertible
$\Rightarrow$ Existe matriz C tal que $C(A^TA) = I$
$\Rightarrow$ La matriz $B = CA^T$ es tal que $BA = I$

b) Verdadero.

Forma 1:

La factorización LU de la matriz es

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a^2 - \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

donde $a > 1$ y

$$a^2 - \frac{1}{a} = \frac{a^3 - 1}{a} = \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a} > 0$$

por lo tanto la matriz es positiva definida.

Forma 2:

Calculamos los determinantes de las submatrices principales de $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a^2 \end{bmatrix}$:

$$|A_1| = |a| = a > 1 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1) > 0$$

Como ambos determinantes son positivos, entonces la matriz es positiva definida.

Puntaje:

- 3 puntos por justificar correctamente la afirmación A.
- 3 puntos por justificar correctamente la afirmación B.