1.
a) Si $x \in Col(A)$ entonces existen $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = \alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ a_{51} \\ a_{61} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ a_{52} \\ a_{62} \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ a_{53} \\ a_{63} \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ a_{54} \\ a_{64} \end{bmatrix} + \alpha_5 \begin{bmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \\ a_{55} \\ a_{65} \end{bmatrix} + \alpha_6 \begin{bmatrix} a_{16} \\ a_{26} \\ a_{36} \\ a_{46} \\ a_{56} \\ a_{66} \end{bmatrix}$$

luego

$$Ax = \alpha_1 A \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ a_{51} \\ a_{61} \end{bmatrix} + \alpha_2 A \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \\ a_{52} \\ a_{62} \end{bmatrix} + \alpha_3 A \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ a_{53} \\ a_{63} \end{bmatrix} + \alpha_4 A \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ a_{54} \\ a_{64} \end{bmatrix} + \alpha_5 A \begin{bmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \\ a_{55} \\ a_{65} \end{bmatrix} + \alpha_6 A \begin{bmatrix} a_{16} \\ a_{26} \\ a_{36} \\ a_{46} \\ a_{56} \\ a_{66} \end{bmatrix}$$

$$Ax = \alpha_1 A \left(A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \alpha_2 A \left(A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \alpha_3 A \left(A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \alpha_4 A \left(A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \alpha_5 A \left(A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \alpha_6 A \left(A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$Ax = \alpha_1 A^2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \alpha_2 A^2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \alpha_3 A^2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \alpha_4 A^2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \alpha_5 A^2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \alpha_6 A^2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$Ax = \alpha_1 \vec{0} + \alpha_2 \vec{0} + \alpha_3 \vec{0} + \alpha_4 \vec{0} + \alpha_5 \vec{0} + \alpha_6 \vec{0}$

$Ax = \vec{0}$

y así $x \in Nul(A)$. (2p)

——OTRA FORMA——
Si $x \in col(A)$ entonces existe y tal que $Ay = x$, luego $A(x) = A(A(y)) = A^2(y) = 0$ y así $x \in Nul(A)$. (2p)

b) Si $A^2 = 0$, por la parte a) tenemos $Ran(A) \leq Nul(A)$ y como $Ran(A) + Nul(A) = 6$ entonces el rango de A a lo más puede ser 3. (2p)

c) Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ la transformación lineal definida por $Tx = Ax$.

(2p)

2.

a) $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (3p)

b) $P = [P]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (2p) (1p)

3.

a) La matriz del sistema ya está en la forma escalonada reducida filas $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= x_4 \\ x_2 &= x_3 + x_4 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned}$$

y poniendo $x_3 = t$, $x_4 = s$ obtenemos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene el conjunto de vectores

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ (2p)

que genera y claramente es linealmente independiente. Por lo tanto es una base y la dimensión de S es 2 (1p)

b) Como $dim(\mathbb{R}^4)$=4, debemos agregar dos vectores linealmente independientes

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ (2p)

El conjunto es linealmente independiente, en efecto

$$\det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = -1 \neq 0$$ (1p)

4. Haciendo operaciones elementales filas tenemos

$$A-5I=\begin{bmatrix}0&-2&6&-1\\0&-2&h&0\\0&0&0&4\\0&0&0&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&h-6&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ (3p)

de donde el espacio propio asociado al valor propio 5 tiene dimensión 2 cuando $h=6$. (3p)

5.

Primero calculamos $\det(A-\lambda I)$

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}-\lambda&-1&-1\\-1&-\lambda&-1\\-1&-1&-\lambda\end{bmatrix}&=-\lambda(\lambda^2-1)+1(\lambda-1)-1(1-\lambda)\\&=(\lambda-1)(-\lambda(\lambda+1)+1+1)\\&=(\lambda-1)(-\lambda^2-\lambda+2)\\&=(\lambda-1)(-\lambda+1)(\lambda+2)\\&=(\lambda-1)^2(\lambda+2)\end{aligned}$$ (2p)

luego, los valores propios de A son $\lambda=1$ y $\lambda=-2$.

Ahora buscamos el espacio propio asociado al valor propio $\lambda=1$

$$A-1I=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\implies V_1=gen\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$ (1p)

de la misma buscamos el espacio propio asociado al valor propio $\lambda=-2$

$$A-(-2)I=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\implies V_{-2}=gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$ (1p)

Por lo tanto, como las multiplicidades de los valores propios y las dimensiones de los espacios propios correspondientes coinciden, la matriz A es diagonalizable y

$$\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$ (2p)

6.
a)

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&4\\0&-1&1\\0&-2&4\end{bmatrix}$$ (2p)

b)

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&4\\0&-1&1\\0&-2&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ (1p)

Luego $dim(Nul(L))=1$. (1p)

c) Como $dim(ran(L))+dim(nul(L))=3$, entonces $dim(ran(L))=2$. (2p)

7.

a) Los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ son $1 \pm 3i$ y el espacio propio asociado al valor propio $1+3i$ es

$$V_{1+3i} = gen\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \\ 1 \end{bmatrix}\right) = gen\left(\begin{bmatrix} 1-3i \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

Si $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ tiene la forma pedida y se verifica que $A = PCP^{-1}$.

b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1/10 & 3/10 \\ -3/10 & 1/10 \end{bmatrix}$. Geométricamente se interpreta como una rotación seguida de un escalamiento.

8.

a) VERDADERO. Si λ es valor propio de A, entonces existe $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$. Por otro lado

$$(A^3 + 4A - 2I)v = \lambda^3 v + 4\lambda v - 2v = (\lambda^3 + 4\lambda - 2)v$$

y así es valor propio de $A^3 + 4A - 2I$.

b) VERDADERO. Si A es diagonalizable existe P tal que $P^{-1}AP = D$ con D diagonal, además

$$\left(P^{-1}AP\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P = D^{-1}$$

por lo tanto existe una matriz P tal que $P^{-1}A^{-1}P$ es diagonal y así A^{-1} es diagonalizable.

c) VERDADERO. El rango de A es el número de pivotes de la forma escalonada reducida de A que es igual al número máximo de filas o columnas linealmente independientes de A.