PREGUNTA 1.

Para que los puntos $P(k,2,-3)$, $Q(2,k,1)$, $R(5,3,-2)$ sean colineales los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ deben ser múltiplos, esto es:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 2-k \\ k-2 \\ -1-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-k \\ k-2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{QR} = \begin{bmatrix} 5-2 \\ 3-k \\ -2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3-k \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR}$$

(2p)

De donde se obtiene $\alpha = -\frac{3}{4}$ y así:

$$-\frac{3}{4}\begin{bmatrix} 2-k \\ k-2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3-k \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{3}{4}(2-k) = 3$$

$$-6+3k = 12$$

$$k = 6$$

(2p)

Y la recta que contiene a los tres puntos será:

$$\mathcal{L}: \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = t\overrightarrow{PQ} + P, \qquad t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{L}: \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = t\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R} \right\}$$

(2p)

PREGUNTA 2

a)

La matriz aumentada del sistema $\begin{cases} x-3y+2z &= 8 \\ 3x-8y-5z &= 11 \\ 2x-4y-18z &= -10 \end{cases}$ es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 8 \\ 3 & -8 & -5 & 11 \\ 2 & -4 & -18 & -10 \end{bmatrix}$$

y su matriz escalonada reducida por filas es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -31 & -31 \\ 0 & 1 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3p)

de donde:

$$\begin{cases} x-31z &= -31 \\ y-11z &= -13 \\ z &= z \end{cases}$$

luego, poniendo $z = t$ obtenemos la solución general del sistema

$$\left\{ \begin{bmatrix} -31+31t \\ -13+11t \\ t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

(1p)

b) La intersección de los tres planos definidos por cada ecuación del sistema es una recta. (1p)

c) Observe que $x = 0 \iff t = 1$, luego la solución cuando $x = 0$ es $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (1p)

PREGUNTA 3

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$. Si la suma de las columnas es $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ entonces: (3p)

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} &= 1 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} &= 2 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} &= 2 \end{aligned}$$

que es equivalente a escribir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es una solución particular del sistema $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Por otro lado, sabemos que el sistema homogéneo $A\vec{x} = 0$ tiene el mismo conjunto solución que el sistema homogéneo asociado a la matriz escalonada de A (2p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}=\vec{0}$$

cuyo conjunto solución es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Finalmente, para obtener la solución del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ basta considerar la suma de la solución del sistema homogéneo mas la solución particular encontrada, es decir:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad (1p)$$

PREGUNTA 4

La matriz que hace girar el plano en $-\frac{3\pi}{4}$ es:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos -\frac{3\pi}{4} & -\sin -\frac{3\pi}{4} \\ \sin -\frac{3\pi}{4} & \cos -\frac{3\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (2p)$$

La matriz que refleja a través del eje X es:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2p)$$

Por lo tanto la matriz pedida es:

$$R_2R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

(2p)

PREGUNTA 5

Primero debemos escribir $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ como combinación lineal de los vectores dados:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \alpha + 2\beta &= x \\ \alpha + 4\beta &= y \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha &= 2x - y \\ \beta &= \frac{y-x}{2} \end{cases}$$

(3p)

Luego aplicamos T y usamos la linealidad para obtener:

$$\begin{aligned} T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= T\left((2x-y)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{y-x}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) \\ &= (2x-y)T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{y-x}{2}T\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= (2x-y)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{y-x}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4x-2y \\ y-2x \\ 3y-3x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2p) (1p)

PREGUNTA 6

La matriz escalonada reducida por filas de la matriz aumentada $[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ es:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{3} & 0 & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{21} & \frac{1}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

(4p)

por lo tanto, la matriz A no tiene inversa.

(2p)

PREGUNTA 7

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} / F_2 + 2F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} / \frac{1}{5}F_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} / -3F_2 + F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1p)

De donde obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(1p)

Además

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$ (1p)

y

$$\begin{aligned} A^t &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^t \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$ (1p)

b) $A - \alpha I = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 3 \\ -2 & -1-\alpha \end{bmatrix}$. Al reducir por filas la matriz ampliada $[A|Id] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1-\alpha & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1-\alpha & 0 & 1 \end{array}\right]$ se obtiene

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-\alpha-1}{\alpha^2+5} & -\frac{3}{\alpha^2+5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\alpha^2+5} & \frac{1-\alpha}{\alpha^2+5} \end{array}\right]$$ (2p)

de donde $A - \alpha I$ es invertible para $\alpha \neq \pm\sqrt{5}$.

PREGUNTA 8

a) Si la matriz tiene dos posiciones pivote, su forma general es $\begin{bmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & * & * \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix} 0 & a & * \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

y en ninguno de los tres casos es posible encontrar la preimagen de $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, por lo tanto la transformación no es invertible. (2p)

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2p)

c) Si $Ax = b$ y A es invertible, entonces existe A^{-1}y la única solución del sistema es $x = A^{-1}b$, en efecto:

$$\begin{aligned} & Ax = b \\ \implies & A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ \implies & Ix = A^{-1}b \\ & x = A^{-1}b \end{aligned}$$ (2p)