PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Ayudantía 8 - MAT1203

1. Si A y B son matrices invertibles de orden 3×3 tal que $\det(A) = -2$ y $\det(2A^3(B^{-1})^t) = -4$, calcule $\det(B)$.

   Solución:

   $$-4 = \det\big(2\cdot A^3\cdot (B^{-1})^t\big) = \det(2I)\,\det(A^3)\,\det\big((B^{-1})^t\big).$$

   Como I es 3×3, $\det(2I) = 2^3$, y como $\det(C^t) = \det(C)$,

   $$-4 = 2^3\,[\det(A)]^3\,\det(B^{-1}) = 2^3\,(-2)^3\,\frac{1}{\det(B)}.$$

   Por lo tanto,

   $$-4 = \frac{-64}{\det(B)} \quad\Longrightarrow\quad \det(B) = \frac{-64}{-4} = 16.$$

2. Sea A una matriz tal que

   $$A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & s \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   a) Calcule el determinante de A^5.

   b) ¿Para qué valores de $s\in\mathbb{R}$ la traspuesta de la matriz A, es decir A^T, es invertible?

   Solución:

   a) Usando la primera fila y el método de cofactores,

   $$\det(A^5) = \det\begin{bmatrix} 3 & 0 & s \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + s\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

   Por lo tanto,

   $$\det(A^5) = 3((-1)(1)-(1)(1)) + s((1)(1)-(-1)(1)) = 3(-2)+s(2) = -6+2s,$$

   es decir,

   $$\det(A^5) = 2s-6.$$

   b) Sabemos que $\det(A^T) = \det(A)$. Para que A^T sea invertible, A debe ser invertible; esto es,

   $$\det(A)\neq 0.$$

Como

$$\det(A^5) = [\det(A)]^5 = 2s - 6,$$

se tiene que $\det(A) \neq 0$ si y sólo si $2s - 6 \neq 0$, es decir, $s \neq 3$. Por lo tanto, A^T es invertible si y sólo si $s \neq 3$.

3. Use la Regla de Cramer para determinar el valor de x_3 que satisfaga el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ -3x_1 + x_3 &= -8 \\ x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Solución:

El sistema descrito corresponde a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Por la Regla de Cramer,

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}.$$

Cálculo de $\det(A)$*:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \det(A) = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Así,

$$\det(A) = 2(0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) - 1((-3) \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 2(-1) - (-6) = -2 + 6 = 4.$$

Cálculo de $\det(A_3)$*:*

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \det(A_3) = -1\begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -8 \end{vmatrix}.$$

Entonces,

$$\det(A_3) = -1\big((-3)(-3) - 0(-8)\big) - \big(2(-8) - (-3)(1)\big) = -9 - (-16 + 3) = -9 - 13 = -14.$$

Finalmente,

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}.$$

4. El paralelepípedo P formado por los vectores canónicos $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ y $\mathbf{e_3}$ es transformado en el paralelepípedo P' determinado por los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine una matriz A que representa la transformación lineal tal que $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1$, $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2$ y $T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_3$.

b) Suponga que $T(P) = P'$. Determine el volumen del paralelepípedo P'.

Solución.

a) La matriz de una transformación lineal respecto de la base canónica se obtiene poniendo como columnas las imágenes de los vectores base:

$$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) El volumen de la imagen de un paralelepípedo bajo T es

$$\mathrm{Vol}(P') = \big|\det(A)\big| \cdot \mathrm{Vol}(P).$$

Como P es el cubo unidad, $\mathrm{Vol}(P) = 1$. Calculamos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot (\cdots) + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(4-1) + 1(1-0) = 6 + 1 = 7.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Vol}(P') = |7| \cdot 1 = 7$.

5. Considere el espacio $\mathbb{P}_2$ es espacio de polinomios de grado menor o igual a dos y sea

$$E = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 : p(1) = p(2)\}.$$

Demuestre que E es subespacio de $\mathbb{P}_2$.

Solución.

Una manera directa es notar que $E = \ker L$, donde $L : P_2 \to \mathbb{R}$ está dada por $L(p) = p(1) - p(2)$. Como $\ker L$ es siempre subespacio de su espacio de partida, se concluye que E es subespacio de P_2.

Para verificarlo "a mano", comprobamos las tres propiedades:

- *Cero en E.* El polinomio nulo $p(x) \equiv 0$ cumple $p(1) = 0 = p(2)$, luego $0 \in E$.
- *Cerrado bajo suma.* Si $p, q \in E$, entonces $p(1) = p(2)$ y $q(1) = q(2)$. Para $r = p + q$,

$$r(1) = p(1) + q(1) = p(2) + q(2) = r(2) \;\Rightarrow\; r \in E.$$

- *Cerrado bajo escalares.* Si $p \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$(\lambda p)(1) = \lambda p(1) = \lambda p(2) = (\lambda p)(2) \;\Rightarrow\; \lambda p \in E.$$

Cumplidas las tres condiciones, E es un subespacio de P_2.