GoodPDF

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Solución Ayudantía 4 - MAT1203

Problema 1

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule:
a) La suma de las matrices: A + B.
b) El producto de las matrices: AB.
c) La traspuesta de la matriz C = AB, es decir, C^T.

Solución P.1
a) Al sumar dos matrices la operación se realiza coordenada a coordenada.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2+0 \\ 3+2 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Al multiplicar dos matrices se realiza la multiplicación de la matriz izquierda por cada uno de los vectores de la derecha.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{-1} & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,(\text{-1}) + 2\,(2) & 1\,(0) + 2\,(1) \\ 3\,(\text{-1}) + 4\,(2) & 3\,(0) + 4\,(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

c) Al transponer una matriz reemplazamos sus filas por sus columnas.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Problema 2

2. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

determine $(2A - B^T)^T C$ y la matriz X que satisface la ecuación $2(AB - X)^T = C^2$.

Solución P.2

$$(2A - B^T)^T C = (2\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^T)^T \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= (\begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 0 & -4 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix})^T \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -4 & -4 & 11 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & -4 \\ -1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -15 & 13 \\ -4 & 24 \\ 34 & -43 \end{bmatrix}$$

Para resolver la ecuación podemos despejar X utilizando operaciones de matrices.

$$2(AB - X)^T = C^2$$

$$(AB - X)^T = \frac{1}{2}C^2$$

$$AB - X = [\frac{1}{2}C^2]^T$$

$$X = AB - [\frac{1}{2}C^2]^T$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - [\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^2]^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 11 & -5 \end{bmatrix} - [\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -15 & 13 \end{bmatrix}]^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 11 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2,5 \\ -7,5 & 6,5 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 11 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -7,5 \\ 2,5 & 6,5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 14,5 \\ 8,5 & -11,5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 29 \\ 17 & -23 \end{bmatrix}$$

Otra opción es escribir X como

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

y luego desarrollar operaciones de matrices para despejar individualmente cada coordenada de X con ecuaciones "normales"(escalares).

Problema 3

Resuelva la ecuación AX + B = C, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$$

Solución P.3

Al igual que en la pregunta anterior podemos resolver de dos formas. Haciendo las operaciones con matrices para despejar directamente X o definir la matriz X y resolver respecto a sus incógnitas. Si utilizamos el primer método:

$$AX + B = C$$

$$AX = C - B$$

$$X = A^{-1}(C - B)$$

Por lo que tenemos que comprobar primero que A es invertible, para luego calcular dicha inversa y operar. La otra opción es definir la matriz X y despejar respecto a sus variables. Si seguimos este método no hace falta que A sea invertible.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

$$AX + B = C$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_{11} - x_{21} & 2x_{12} - x_{22} \\ x_{11} + 3x_{21} & x_{12} + 3x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_{11} - x_{21} & 2x_{12} - x_{22} \\ x_{11} + 3x_{21} & x_{12} + 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_{11} - x_{21} & 2x_{12} - x_{22} \\ x_{11} + 3x_{21} & x_{12} + 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Luego, separando cada coordenada de la matriz, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x_{11} - x_{21} = 6$$

$$2x_{12} - x_{22} = 3$$
$$x_{11} + 3x_{21} = 3$$
$$x_{12} + 3x_{22} = 9$$

Resolviendo por el método que sea:

$$x_{11} = 3 \qquad x_{12} = \frac{18}{7}$$
$$x_{21} = 0 \qquad x_{22} = \frac{15}{7}$$

Luego,

$$X = \begin{bmatrix} 3 & \frac{18}{7} \\ 0 & \frac{15}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 21 & 18 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Problema 4

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

a)Demuestre que A es invertible.

b)Determine A^{-1}.

c)Use lo anterior para resolver $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución P.4

a) Para una matriz cuadrada los siguientes hechos son equivalentes:
- Determinante $\neq 0$.
- Vectores de la matriz son linealmente independientes.
- La matriz es invertible.

Ahora podemos comprobar que es invertible calculando su determinante.

$$Det(A) = Det(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}) = 2 * (-2) - (-1) * 3 = -1 \neq 0$$

Luego, A es invertible.

b)Ahora, para calcular la inversa de A expandimos A con la identidad y luego escalonamos.

$$[A|I] => [I|A^{-1}]$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] => \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$=> \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] => \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$=> \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Por lo que la inversa de A, A^{-1} es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

c) Por último, en $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, podemos despejar x, tal que:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$