Factorizaciones matriciales

Versión Septiembre de 2011

Pontificia Universidad Católica de Chile

Índice

1. Matrices elementales **1**
1.1. Inversas y transpuestas de matrices elementales 3

2. Factorización $A = LU$ **4**
2.1. Matrices triangulares 4
2.2. La factorización LU 6
2.3. Relación por filas de $A = LU$ 7

3. Factorización $PA = LU$ **8**
3.1. Aplicaciones de la factorización $PA = LU$ 11

4. Factorización de Cholesky **14**
4.1. Factorización LU de matrices simétricas 14
4.2. Formas cuadráticas 15
4.2.1. Conceptos básicos 16
4.2.2. Clasificación de las formas cuadráticas 19
4.3. Matrices definidas positivas 23
4.3.1. Propiedades de las matrices definidas positivas 23
4.3.2. Segunda Factorización de Cholesky 24

1. Matrices elementales

Las factorizaciones matriciales permiten manejar matrices complicadas con métodos simples. Sus aplicaciones principales se relacionan con los análisis de datos utilizando diversos programas computacionales en los cuales se reduce tanto el tiempo de cálculo como los errores que genera la aritmética de punto flotante. Nuestra intención principal en este capítulo es dividir un proceso complejo, representado por una transformación lineal T y su matriz canónica A, en un cierto número de subprocesos T_1, T_2, ..., T_k cuyas matrices asociadas son $A_1, A_2, \ldots, A_k$, de modo que

$$T_k \circ \cdots \circ T_2 \circ T_1 = T,$$

lo que en lenguaje de matrices significa factorizar A en un producto de matrices más "simples":

$$A = A_k \cdots A_2 A_1.$$

En esta sección, nuestra meta será establecer una interpretación matricial de las operaciones elementales, mediante las cuales realizamos el algoritmo de escalonamiento de Gauss.

Recordemos que las tres operaciones elementales (por filas) que generan matrices equivalentes son:

(*i*) de **Permutación**: $F_i \longleftrightarrow F_j$ (intercambia de lugar la Fila i con la Fila j).

(*ii*) de **Escalamiento**: $F_i \cdot c \longrightarrow F_i$, donde $c \neq 0$ (amplifica por una constante no nula c la Fila i).

(*iii*) de **Eliminación**: $F_i + cF_j \longrightarrow F_i$, donde $c = -\dfrac{\text{"elemento a eliminar"}}{\text{"pivote"}}$ (permite hacer cero los elementos bajo un pivote, al sumar a la Fila i un múltiplo de la Fila j)

Definición: *Una **matriz elemental** es una matriz cuadrada (de $n \times n$ para algún $n \in \mathbb{N}$), que se obtiene al realizar exactamente una operación elemental a la matriz identidad de $n \times n$, $\mathbb{I}_n$.*

Así, cada matriz elemental "representará" la operación elemental que debe realizarse a $\mathbb{I}_n$ para obtenerla.

Ejemplos:

1. $\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $F_1 \longleftrightarrow F_2$ $\Longrightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz elemental de permutación.
2. $\mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $F_3 - 2F_1$ $\Longrightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz elemental de eliminación.
3. $\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $F_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ $\Longrightarrow E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz elemental de escalamiento.

Notación: Anotaremos las matrices elementales (sin importar de qué orden sean) por:

(*i*) P_{ij} representa la operación elemental de permutación $F_i \longleftrightarrow F_j$. Así, P_{ij} es una **matriz elemental de permutación**.

(*ii*) $E_i(c)$ representa la operación elemental $F_i \cdot c$ ($c \neq 0$). Luego, $E_i(c)$ es una **matriz elemental de escalamiento**.

(*iii*) $E_{ij}(c)$ representa la operación elemental $F_i + cF_j$. Así, $E_{ij}(c)$ es una **matriz elemental de eliminación**.

En los ejemplos anteriores, tendremos que $E_1 = P_{12}$, $E_2 = E_{31}(-2)$ y $E_3 = E_2\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Nota : La matriz identidad $\mathbb{I}_n$ también es una matriz elemental, pues $\mathbb{I}_n = E_1(1) = E_{12}(0) = \ldots$

Es fácil ver la forma general que tendrá cada una de estas matrices. Así:

$$P_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & \text{columna } i & & \text{columna } j & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & 1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & 1 & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila } j \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Los unos que deben ir en las posiciones (i,i) y (j,j) de la identidad están ahora en las posiciones (i,j) y (j,i) mientras que en las posiciones (i,i) y (j,j) ahora hay ceros.

$$E_i(c) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & & \text{columna } i & & \\ & & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila } i \\ \\ \\ \end{array}$$

Sólo el uno de la posición (i,i) es reemplazado por c, todos los otros elementos coinciden con los de la identidad.

$$E_{ij}(c) = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & & \text{col.} & & \text{col.} & & \\ & & & & i & & j & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow \text{fila } i$$

El único elemento distinto de los elementos de la matriz identidad es áquel que se ubica en la posición (i, j) en que que en vez de ser un cero es c. Es decir, esta matriz es la identidad con el elemento c en la posición (i, j).

1.1. Inversas y transpuestas de matrices elementales

Como la forma escalonada reducida de cualquier matriz elemental es la matriz identidad (basta deshacer la operación elemental), tenemos que todas las matrices elementales tienen inversas. Además, como conocemos la forma de cada matriz elemental, podemos determinar su matriz transpuesta. Ambas matrices, la inversa de una matriz elemental y la transpuesta de una matriz elemental, son, a su vez, matrices elementales. De hecho,

Matriz elemental	Matriz inversa	Matriz traspuesta
P_{ij}	$(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$	$(P_{ij})^T = P_{ji} = P_{ij}$
$E_i(c)$	$(E_i(c))^{-1} = E_i\left(\frac{1}{c}\right)$	$(E_i(c))^T = E_i(c)$
$E_{ij}(c)$	$(E_{ij}(c))^{-1} = E_{ij}(-c)$	$(E_{ij}(c))^T = E_{ji}(c)$

La principal propiedad de las matrices elementales se presenta en el siguiente teorema. La demostración es un ejercicio recomendable para el lector.

Teorema. *Sean A una matriz de $m \times n$ y M una matriz elemental de $m \times m$. Entonces*

$$MA = A',$$

donde A' es la matriz que se obtiene al realizarle a A la operación elemental que representa M.

Demostración: La demostración de este teorema queda propuesta. Como indicación para realizar la demostración, podemos decir que conviene considerar tres casos: (1) $M = P_{ij}$, (2) $M = E_i(c)$ y (3) $M = E_{ij}(c)$ y realizar la multiplicación MA.

Ejemplo: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ y $M = E_{23}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$. Entonces:

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & -13 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = A'$$

Por otro lado,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad F_2 - 3F_3 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & -13 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = A'$$

Ejercicio: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Escribamos A y A^{-1} como producto de matrices elementales (lo que se podrá realizar si y sólo si la matriz A es invertible).

Para esto, llevamos A a su forma escalonada reducida (que al ser invertible, debe ser la identidad $\mathbb{I}_4$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_2 \\ F_4 - F_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 - F_2 \\ F_2 - F_3 \\ F_3 - F_4 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_4$$

Si escribimos este proceso usando matrices elementales, tendremos que

$$\underbrace{E_{34}(-1)\ E_{23}(-1)\ E_{12}(-1)\ E_{21}(-1)\ E_{32}(-1)\ E_{43}(-1)}_{C} A = \mathbb{I}_4$$

Luego, la matriz C es una matriz inversa por izquierda de A y como A es cuadrada, tenemos que $C = A^{-1}$. Así,

$$A^{-1} = E_{34}(-1)\ E_{23}(-1)\ E_{12}(-1)\ E_{21}(-1)\ E_{32}(-1)\ E_{43}(-1)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} A = (A^{-1})^{-1} &= \big(E_{34}(-1)\ E_{23}(-1)\ E_{12}(-1)\ E_{21}(-1)\ E_{32}(-1)\ E_{43}(-1)\big)^{-1} \\ &= E_{43}^{-1}(-1)\ E_{32}^{-1}(-1)\ E_{21}^{-1}(-1)\ E_{12}^{-1}(-1)\ E_{23}^{-1}(-1)\ E_{34}^{-1}(-1) \\ &= E_{43}(1)\ E_{32}(1)\ E_{21}(1)\ E_{12}(1)\ E_{23}(1)\ E_{34}(1) \end{aligned}$$

Nota : En general, las matrices elementales no conmutan. Por ejemplo,

$$E_{32}(-1)E_{13}(-4) \neq E_{13}(-4)E_{32}(-1).$$

2. Factorización $A = LU$

Antes de definir la factorización LU, vamos a revisar un par de definiciones y propiedades.

2.1. Matrices triangulares

Definición:

1. *Una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ es **triangular superior** si todos los elementos bajo la diagonal principal son ceros, es decir, $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$.*
2. *Una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ es **triangular inferior** si A^T es triangular superior, es decir, $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$.*

Teorema. *Considere las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$ y $C = AB = (c_{ij})_{m\times p}$.*

1. *Si $a_{ij} = 0$ y $b_{ij} = 0$ cuando $i > j$, entonces $c_{ij} = 0$ cuando $i > j$ ("El producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior").*
2. *Si $a_{ij} = 0$ y $b_{ij} = 0$ cuando $i < j$, entonces $c_{ij} = 0$ cuando $i < j$ ("El producto de dos matrices triangulares inferiores es triangular inferior").*
3. *Si A y B son matrices triangulares (ambas inferiores o ambas superiores) y si $a_{ii} = 1$ y $b_{ii} = 1$, entonces C es matriz triangular (del mismo tipo que A y B) y $c_{ii} = 1$ ("El producto de matrices triangulares con unos en la diagonal también es triangular con unos en la diagonal").*

Demostración: La demostración es directa de la definición de producto de matrices. Queda propuesta.

Teorema. *Sea $A_{n\times n}$ una matriz invertible.*

1. *Si A es triangular superior, entonces A^{-1} es triangular superior.*
2. *Si A es triangular inferior, entonces A^{-1} es triangular inferior.*
3. *Si A es triangular (superior o inferior) y tiene unos en la diagonal, entonces A^{-1} también es triangular y tiene unos en la diagonal.*

Demostración: Demostraremos la afirmación 1.

Suponemos que A es una matriz triangular superior. Como A es invertible, tendremos que los elementos de la diagonal de A son distintos de cero (A es invertible si y sólo si $\mathrm{r}(A)$).

Para determinar A^{-1}, deberemos resolver simultáneamente los sistemas

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{x_1} &= \overrightarrow{e_1} \\ A\overrightarrow{x_2} &= \overrightarrow{e_2} \\ &\vdots \\ A\overrightarrow{x_n} &= \overrightarrow{e_n} \end{aligned}$$

donde $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{x_n}$ son las columnas de A^{-1}.

Es decir, debemos realizar un cierto número de operaciones elementales a la matriz ampliada $\left(A \,|\, \mathbb{I}_n\right)$ para llevarla a la matriz ampliada $\left(\mathbb{I}_n \,\middle|\, \overrightarrow{x_1}\,\overrightarrow{x_2}\,\cdots\,\overrightarrow{x_n}\right) = \left(\mathbb{I}_n \,|\, A^{-1}\right)$, digamos que son p operaciones elementales.

Debido a las características de la matriz A (invertible triangular superior), es claro que las operaciones elementales realizadas serán únicamente de eliminación y de escalamiento. Las operaciones elementales de eliminación se realizarán para hacer cero los elementos de cada columna que estén sobre cada pivote. Por tanto, las matrices elementales que representan estas operaciones de eliminación serán matrices triangulares superiores (serán de la forma $E_{ij}(c)$ con $i < j$). Mientras que las matrices elementales que representan las operaciones de escalamiento, serán matrices diagonales (los únicos elementos distintos de cero son los de la diagonal), luego, también son triangulares superiores.

Así, al representar matricialmente el proceso

$$\left(A \,|\, \mathbb{I}_n\right) \sim \sim \ \cdots \ \sim \sim \left(\mathbb{I}_n \,|\, A^{-1}\right),$$

tendremos que

$$E_p \cdots E_2 \ E_1 \ A = \mathbb{I}_n$$

y la matriz $A^{-1} = E_p \cdots E_2 E_1$, que es producto de matrices elementales triangulares superiores.

Luego, A^{-1} es triangular superior.

2.2. La factorización LU

Supongamos que la matriz A de $m \times n$ puede llevarse a su forma escalonada realizando sólo operaciones elementales de eliminación, es decir, al hacer cero los elementos bajo un pivote nunca es necesario realizar un intercambio de fila.

De esta manera, si llamamos $U_{m\times n}$ a la matriz triangular superior que es la forma escalonada de A, resultante del proceso de escalamiento de Gauss, tendremos que el proceso

$$A \sim \sim \ \cdots \ \sim \sim U$$

se representa matricialmente por

$$E_k \ E_{k-1} \ \cdots \ E_2 \ E_1 \ A = U,$$

donde cada una de las matrices elementales E_1, E_2, $\ldots$, E_k son matrices elementales de eliminación, es decir, cada una es de la forma $E_{ij}(c)$ con $i < j$, pues como los elementos que se hacen cero están bajo la diagonal, tendremos que cada matriz elemental de eliminación será triangular inferior con unos en la diagonal. Luego, la matriz $(E_k \ \cdots \ E_2 \ E_1)$ será una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y, además, será invertible con matriz inversa triangular inferior con unos en la diagonal. Llamemos

$$L = (E_k \ \cdots \ E_2 \ E_1)^{-1} = E_1^{-1} \ E_2^{-1} \ \cdots \ E_k^{-1}$$

De donde tendremos que

$$A = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior (forma escalonada de A).

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 17 & -4 & -1 \\ -1 & -3 & -9 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Encontremos su factorización LU.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 17 & -4 & -1 \\ -1 & -3 & -9 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - (-1)F_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 - (-2)F_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Matricialmente, tendremos que

$$\underbrace{E_{32}(2) \ E_{31}(1) \ E_{21}(-3)}_{L^{-1}} \ A = U$$

Luego,

$$\begin{aligned} L &= \Big(E_{32}(2) \ E_{31}(1) \ E_{21}(-3)\Big)^{-1} \\ &= E_{21}^{-1}(-3) \ E_{31}^{-1}(1) \ E_{32}^{-1}(2) \\ &= E_{21}(3) \ E_{31}(-1) \ E_{32}(-2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota : Los elementos bajo la diagonal de L corresponden a los números "eliminadores" de las operaciones elementales que se realizan a A para obtener U. Recordemos que los elementos eliminadores son de la forma

$$\frac{\text{"elemento a eliminar"}}{\text{"pivote"}}$$

Esta observación facilita la obtención de la factorización LU de una matriz. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - \frac{1}{2}F_1 \\ F_3 - 0F_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 - 8F_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix} = U$$

Entonces,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

y podemos comprobar que $A = LU$.

2.3. Relación por filas de $A = LU$

Consideremos una matriz $A_{m\times n}$ que tiene una factorización LU. Si describimos por filas las matrices A y U, tendremos que

$$A = \begin{pmatrix} \overline{A_1} \\ \overline{A_2} \\ \overline{\vdots} \\ \overline{A_m} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} \overline{U_1} \\ \overline{U_2} \\ \overline{\vdots} \\ \overline{U_m} \end{pmatrix}$$

y como $A = LU$,

$$\begin{pmatrix} \overline{A_1} \\ \overline{A_2} \\ \overline{A_3} \\ \overline{\vdots} \\ \overline{A_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & \mathbb{O} & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{m1} & l_{m2} & l_{m3} & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{U_1} \\ \overline{U_2} \\ \overline{U_3} \\ \overline{\vdots} \\ \overline{U_m} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A_1 &= U_1 \\ A_2 &= l_{21}U_1 + U_2 \\ A_3 &= l_{31}U_1 + l_{32}U_2 + U_3 \\ &\vdots \\ A_m &= l_{m1}U_1 + l_{m2}U_2 + l_{m3}U_3 + \cdots + U_m \end{aligned}$$

Es decir, la fila $i-$ésima de A es combinación lineal de las filas de U y los coeficientes de la c.l. son los elementos de la $i-$ésima fila de L.

3. Factorización $PA = LU$

Calculemos la factorización LU de la matriz A presentada a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - (-2)F_1 \\ F_3 - F_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pero en este momento es obligatorio realizar una operación elemental de intercambio. Por tanto, esta matriz NO TIENE una factorización LU. En estos casos, realizaremos una factorización $PA = LU$.

Esta factorización es una modificación del método por el cual se obtiene la factorización LU, en donde la matriz P almacenará todos los cambios de fila que deben realizarse para llevar A a su forma escalonada U. Retomemos el ejemplo, para determinar cómo obtener esta nueva factorización matricial. Entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - (-2)F_1 \\ F_3 - F_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} F_2 \longleftrightarrow F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ F_4 - 2F_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} F_3 \longleftrightarrow F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} = U$$

Matricialmente, este proceso se expresa con la igualdad:

$$\underbrace{P_{34}\ E_{42}(-2)\ P_{23}\ E_{31}(-1)\ E_{21}(2)}_{M}\ A = U$$

Pero las matrices elementales de permutación presentes en la matriz M impiden que ésta sea una matriz triangular inferior (y, así no podemos construir la matriz L). Para solucionar este problema realizaremos las operaciones de permutación en primer lugar y una vez que tengamos ordenadas las filas de A de modo que ya no se requieran intercambios de fila durante el proceso de escalonamiento, realizaremos las operaciones de eliminación necesarias. El problema de este ajuste es que, en general, las matrices elementales no conmutan, por tanto, al "trasladar" las matrices de permutación de lugar, no podemos garantizar que la igualdad se mantenga.

Por tanto, el procedimiento consistirá en calcular la factorización LU de la matriz $B = P_{34}\ P_{23}\ A$, que es una matriz con las mismas filas de A, pero ordenadas para que no sea necesario hacer intercambios de filas durante el escalonamiento.

Así,

$$B = P_{34}\ P_{23} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = P_{34} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ \\ F_4 - (-2)F_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} F_3 - 2F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} = U$$

Y obtenemos la misma matriz U que habíamos encontrado al comienzo. Este proceso se describe matricialmente por la igualdad

$$E_{32}(-2)\ E_{41}(2)\ E_{21}(-1)\ B = U$$

y en términos de A, tenemos que

$$E_{32}(-2)\ E_{41}(2)\ E_{21}(-1)\ P_{34}\ P_{23}\ A = U$$

Ahora, tenemos que la matriz $\big(E_{32}(-2)\ E_{41}(2)\ E_{21}(-1)\big)$ es triangular inferior con unos en la diagonal, por tanto, llamamos L a la matriz $L = \big(E_{32}(-2)\ E_{41}(2)\ E_{21}(-1)\big)^{-1}$ y P a la matriz $P_{34}\ P_{23}$ con lo que tendremos que

$$PA = LU$$

donde P es producto de matrices elementales de permutación (la que se conoce como una matriz "no elemental" de permutación), L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior (forma escalonada de A).

Nota 1: Las matrices P y L son producto de matrices elementales, por tanto, son matrices cuadradas e invertibles.

Nota 2: Recordemos la igualdad que se obtenía al escalonar A intercambiando filas en el medio del pivoteo:

$$P_{34}\ E_{42}(-2)\ P_{23}\ E_{31}(-1)\ E_{21}(2)\ A = U$$

y observemos el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}
& P_{34}\ E_{42}(-2)\ \overbrace{P_{23}\ E_{31}(-1)}^{\text{intercambiamos}}\ E_{21}(2)\ A = U \\
\Longrightarrow\quad & P_{34}\ E_{42}(-2)\ E_{21}(-1)\ \overbrace{P_{23}\ E_{21}(2)}^{\text{intercambiamos}}\ A = U \\
\Longrightarrow\quad & P_{34}\ E_{42}(-2)\ E_{21}(-1)\ E_{31}(2)\ P_{23}\ A = U \\
\Longrightarrow\quad & \overbrace{P_{34}\ E_{42}(-2)}^{\text{intercambiamos}}\ E_{21}(-1)\ E_{31}(2)\ P_{23}\ A = U \\
\Longrightarrow\quad & E_{32}(-2)\ \overbrace{P_{34}\ E_{21}(-1)}^{\text{intercambiamos}}\ E_{31}(2)\ P_{23}\ A = U \\
\Longrightarrow\quad & E_{32}(-2)\ \underbrace{E_{21}(-1)\ E_{41}(2)}_{\text{conmutan}}\ P_{34}\ P_{23}\ A = U
\end{aligned}$$

de donde obtenemos la igualdad

$$E_{32}(-2)\ E_{41}(2)\ E_{21}(-1)\ P_{34}\ P_{23}\ A = U$$

Lo que indica cómo obtener la factorización $PA = LU$ directamente del proceso mediante el cual llevamos A a su forma escalonada U. En este procedimiento hemos usado algunas propiedades de las matrices elementales que son fácilmente demostrables:

1. $P_{ij}\ E_{ir}(c) = E_{jr}(c)\ P_{ij}$ y $P_{ij}\ E_{jr}(c) = E_{ir}(c)\ P_{ij}$ con $r \neq i$ y $r \neq j$.
2. $P_{ij}\ E_{rs}(c) = E_{rs}(c)\ P_{ij}$ con $r, s \neq i$ y $r, s \neq j$
3. $E_{ik}(\alpha)\ E_{jk}(\beta) = E_{jk}(\beta)\ E_{ik}(\alpha)$

Ejemplo: Calculemos la factorización $PA = LU$ para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \\ F_4 - F_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} F_4 \longleftrightarrow F_2 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} F_3 + 3F_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} F_4 + F_3 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U \end{aligned}$$

Escribimos el proceso matricialmente:

$$E_{43}(1)\ E_{32}(3)\ P_{42}\ E_{41}(-1)\ E_{31}(-2)\ E_{21}(-1)\ A = U$$

y usando las propiedades de las matrices elementales, tenemos que la igualdad anterior es equivalente a

$$E_{43}(1)\ E_{32}(3)\ E_{21}(-1)\ E_{31}(-2)\ E_{41}(-1)\ P_{42}\ A = U$$

De donde se tiene que

$$P = P_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} L &= \Big(E_{43}(1)\ E_{32}(3)\ E_{21}(-1)\ E_{31}(-2)\ E_{41}(-1)\Big)^{-1} \\ &= E_{41}(1)\ E_{31}(2)\ E_{21}(1)\ E_{32}(-3)\ E_{43}(-1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde hemos hecho coincidir los colores de cada elemento bajo la diagonal de L con la matriz elemental de la cual proviene. Notemos que el elemento cero en la posición $(4, 2)$ se debe a que ninguna operación elemental se realizó entre las filas 4 y 2.

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1. Aplicaciones de la factorización $PA = LU$

I. Resolver $\mathbf{Ax = b}$

Supongamos que conocemos las matrices P, L y U de la factorización $PA = LU$ de A. Usaremos el siguiente proceso para resolver $Ax = b$ a través de la factorización:

$$\begin{aligned} & & P/\cdot \quad & Ax = b & \\ \iff & & & PAx = Pb & \text{, pero } PA = LU \\ \iff & & & L\underbrace{Ux}_{y} = Pb & \\ \implies & \text{Resolvemos} & \begin{cases} 1^\circ & Ly = Pb \\ 2^\circ & Ux = y \end{cases} & & \end{aligned}$$

La ventaja de resolver un sistema de ecuaciones usando la factorización $PA = LU$ consiste en una reducción notoria en el número de operaciones que deben realizarse (ver Notas numéricas, Lay, *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*, p. 137), pues los sistemas que deben resolverse ($Ly = Pb$ y $Ux = y$) tienen matrices triangulares, por lo que se resuelven por sustitución directa.

II. Encontrar $\mathbf{A^{-1}b}$

Para encontrar $A^{-1}b$ se resuelve $Ax = b$ por el método anterior.

A pesar de que resolver los sistemas $Ly = Pb$ y $Ux = y$ obliga a hacer la misma cantidad de operaciones (sumas y multiplicaciones) que calcular $A^{-1}b$, tenemos que encontrar la factorización $PA = LU$ requiere menos trabajo que el cálculo de A^{-1} (pues además de las operaciones elementales que se realizan sobre A para encontrar la factorización, deben realizarse las mismas operaciones sobre $\mathbb{I}_n$ para encontrar A^{-1}).

De esta manera, A^{-1} sólo se calcula cuando se necesitan explícitamente sus elementos.

III. Resolver $\mathbf{AX = B}$ (con X y B matrices)

Siendo concretos, supongamos que A es una matriz de $m \times n$ y que conocemos la factorización $PA = LU$, por lo que P es de $m \times m$, L es de $m \times m$ y U es de $m \times n$. Supongamos que B es una matriz de $m \times p$, lo que implica que la matriz X que buscamos es de $n \times p$.

Entonces para resolver $AX = B$ usando $PA = LU$, tendremos que

$$\begin{aligned} & & P/\cdot \quad & AX = B & \\ \iff & & & PAX = PB & \text{, pero } PA = LU \\ \iff & & & L\underbrace{UX}_{Y} = PB & \\ \implies & \text{Resolvemos} & \begin{cases} 1^\circ & LY = PB \\ 2^\circ & UX = Y \end{cases} & & \end{aligned}$$

donde Y será una matriz de $m \times p$.

En este caso, resolver $LY = PB$ implica resolver p sistemas simultáneos:

$$\begin{aligned} Ly_1 &= Pb_1 \\ Ly_2 &= Pb_2 \\ &\vdots \\ Ly_p &= Pb_p \end{aligned}$$

donde $Y = \begin{bmatrix} y_1 | y_2 | \cdots | y_p \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_1 | b_2 | \cdots | b_p \end{bmatrix}$, es decir, se debe operar la matriz ampliada $\left[\, L \,\middle|\, PB \,\right]$ hasta llevar L a su forma escalonada reducida (pero L es invertible, luego su escalonada reducida es $\mathbb{I}_m$). Entonces, la resolución de $LY = PB$ es:

$$\left[\, L \,\middle|\, PB \,\right] \sim \sim \ \cdots \ \sim \left[\, \mathbb{I}_m \,\middle|\, Y \,\right]$$

Pero como L es triangular inferior con unos en la diagonal, sólo se deben eliminar los elementos bajo los pivotes.

De forma análoga, para resolver $UX = Y$ se debe operar la matriz ampliada $\left[\, U \,\middle|\, Y \,\right]$ hasta llevar U a su forma escalonada reducida. Dependiendo de si U es invertible, tendremos una única solución para X o infinitas soluciones para X.

IV. Resolver $\mathbf{A^T x = b}$

Asumimos conocida la factorización $PA = LU$.

Notemos que

$$PA = LU/(\ )^T \Longrightarrow A^T\ P^T = U^T\ L^T,$$

pero $P^T = P^{-1}$, luego,

$$A^T = U^T\ L^T\ P.$$

Así,

$$A^T x = b \Longrightarrow U^T\ L^T\ \underbrace{Px}_{y} = b \Longrightarrow U^T\ \underbrace{L^T y}_{z} = b \Longrightarrow U^T z = b$$

y para resolver $A^T x = b$, se resuelven tres sistemas (dos sistemas triangulares y uno extremadamente simple):

$$\begin{cases} 1^\circ & U^T z = b \\ 2^\circ & L^T y = z \\ 3^\circ & Px = y \end{cases}$$

Ejemplo: Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ determine únicamente lo solicitado:

1. la solución de $Ax = b$, donde $b^T = \left[\ 1 \quad -1 \quad 1\ \right]$.
2. la solución de $A^T x = b$, donde $b^T = \left[\ 1 \quad -1 \quad 1\ \right]$.
3. la tercera columna de A^{-1}.
4. la segunda fila de A^{-1}.
5. el elemento en la posición $(1, 1)$ de la matriz A^{-1}.

Solución: Comenzamos calculando la factorización $PA = LU$ para esta matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 - (-1)F_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = U$$

Por tanto, en este caso, $P = \mathbb{I}_3$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

1. Para resolver $Ax = b$, debemos resolver $\begin{cases} 1^\circ & Ly = Pb \\ 2^\circ & Ux = y \end{cases}$

$$Ly = Pb \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 + y_1 = 0 \\ y_3 = 1 - 2y_1 + y_2 = -1 \end{cases}$$

$$Ux = y \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1}{3} \\ x_2 = x_3 = \frac{1}{3} \\ x_1 = \frac{1-x_2-x_3}{2} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Luego, $x = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$.

2. Para resolver $A^T x = b$, debemos resolver $\begin{cases} 1^\circ & U^T z = b \\ 2^\circ & L^T y = z \\ 3^\circ & Px = y \end{cases}$

$$U^T z = b \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} \\ z_2 = 1 + z_1 = \frac{3}{2} \\ z_3 = \frac{1-z_1-z_2}{-3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$L^T y = z \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y_3 = \frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{3}{2} + y_3 = \frac{11}{6} \\ y_1 = \frac{1}{2} + y_2 - 2y_3 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$Px = y \Longrightarrow x = y = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 11/6 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

3. Para obtener la tercera columna de A^{-1} debemos resolver $Ax = e_3$, es decir, debemos resolver los sistemas $Ly = Pe_3$ y $Ux = y$. La solución de $Ly = Pe_3$ es $y = (0, 0, 1)^T$ y la solución de $Ux = y$ es $x = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T$. Por tanto, la tercera columna de A^{-1} es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4. Para obtener la segunda fila de A^{-1}, recordemos que $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. Luego, encontrar la segunda fila de A^{-1} equivale a encontrar la segunda columna de $(A^T)^{-1}$, es decir, hay que resolver el sistema $A^T x = e_2$.

   Entonces se deben resolver los sistemas $U^T z = e_2$, $L^T y = z$ y $Px = y$. La solución de $U^T z = e_2$ es $z = (0, -1, -1/3)^T$, la solución de $L^T y = z$ es $y = (-2/3, -4/3, -1/3)^T$ y $x = y$ pues $P = \mathbb{I}_3$. Por tanto, la segunda fila de A^{-1} es

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

5. Para encontrar el elemento en la posición $(1, 1)$ de A^{-1}, llamémoslo b_{11}, notemos que este elemento está dado por el producto

$$b_{11} = e_1^T \ A^{-1} e_1.$$

   Pero como $PA = LU$ y $P = \mathbb{I}_3$, tenemos que

$$A = LU/(\ )^{-1} \Longrightarrow A^{-1} = U^{-1} L^{-1}.$$

   Luego,

$$b_{11} = e_1^T \ A^{-1} e_1 = e_1^T \ U^{-1} \ L^{-1} e_1 = \left(e_1^T \ U^{-1}\right)\left(\ L^{-1} e_1\right),$$

   pero

$$e_1^T \ U^{-1} = \left(\left(U^{-1}\right)^T e_1\right)^T.$$

   Entonces

$$b_{11} = \left((U^T)^{-1} e_1\right)^T \left(L^{-1} e_1\right)$$

y debemos calcular los vectores $x = (U^T)^{-1}e_1$ e $y = L^{-1}e_1$, es decir, debemos resolver los sistemas triangulares $U^T x = e_1$ y $Ly = e_1$. La solución de $U^T x = e_1$ es $x = (1/2, 1/2, 1/3)^T$ y la solución de $Ly = e_1$ es $y = (1, 1, -1)^T$. Por tanto,

$$b_{11} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}$$

4. Factorización de Cholesky

4.1. Factorización LU de matrices simétricas

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ -2 & 7 & 28 & 10 \\ 0 & 3 & 10 & 17 \end{pmatrix}.$$

A es simétrica, es decir, $A^T = A$. Veamos cómo esta propiedad influye cuando calculamos su matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ -2 & 7 & 28 & 10 \\ 0 & 3 & 10 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{c|ccc} -2 & 2 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 30 & 10 \\ 0 & 3 & 10 & 17 \end{array}\right)$$

Notemos que la submatriz (con elementos rojos) que debemos considerar ahora para pivotear también es simétrica. Lo mismo ocurre al seguir pivoteando:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 30 & 10 \\ 0 & 3 & 10 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 - 5F_2 \\ F_4 - 3F_3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ F_4 + F_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

Además, tenemos que A tiene una factorización LU, pues no tuvo que hacerse ningún intercambio de filas para llegar a U. Observando las operaciones elementales realizadas, tenemos que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

son tales que $A = LU$.

Por último, notemos que si $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces

$$U = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = DL^T$$

Es decir,

$$A = LDL^T$$

Este resultado no es un caso particular.

Teorema. *Sea A una matriz simétrica de $n \times n$. Si A tiene una factorización LU (es decir, A puede ser escalonada sin intercambios de filas), entonces A puede factorizarse como*

$$A = LDL^T,$$

donde L es la matriz triangular inferior con unos en la diagonal de la factorización LU y D es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales coinciden con los elementos diagonales de la matriz U (de la factorización LU).

Demostración: Por hipótesis, tenemos que $A^T = A$ y que $A = LU$, con L triangular inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior y forma escalonada de A.
Entonces $U\big(L^{-1}\big)^T$ es un producto de matrices triangulares superiores, por tanto, es triangular superior. Pero, por otro lado, tenemos que $U = L^{-1}A$, de donde

$$U\big(L^{-1}\big)^T = (L^{-1}A)\big(L^{-1}\big)^T = L^{-1}\Big(A\big(L^{-1}\big)^T\Big) = L^{-1}\Big(L^{-1}A^T\Big)^T = L^{-1}\Big(L^{-1}A\Big)^T = L^{-1}U^T.$$

Entonces, $U\big(L^{-1}\big)^T = L^{-1}U^T$ también es producto de matrices triangulares inferiores, por tanto, es triangular inferior.
De esta manera, hemos probado que $U\big(L^{-1}\big)^T$ es una matriz diagonal (es triangular superior e inferior a la vez) y, claramente, los elementos diagonales de esta matriz coinciden con los elementos diagonales de U (pues la matriz $(L^{-1})^T$ tiene unos en la diagonal). Anotamos $U\big(L^{-1}\big)^T = D$, de donde es directo que $U = DL^T$ y

$$A = LU = LDL^T.$$

Nota 1: La factorización para matrices simétricas $A = LDL^T$ se conoce como la **primera factorización de Cholesky** (o la **factorización de Cholesky sin raíces**).

Nota 2: No todas las matrices simétricas tienen una factorización de la forma $A = LDL^T$, pues si al escalonar A se deben hacer intercambios de fila por obligación, generalmente la matriz PA (que sí tendrá una factorización LU) dejará de ser simétrica. Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene una factorización LU, pues es obligatorio cambiar la primera fila de lugar para comenzar el pivoteo. Si intercambiamos las filas 1 y 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 25 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 25 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{36}{25} \end{pmatrix} = U \quad \Longrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -\frac{8}{25} & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente, aquí no se tiene que $U = DL^T$.

4.2. Formas cuadráticas

A continuación veremos una aplicación de la primera factorización de Cholesky y, al mismo tiempo, desarrollaremos algunos elementos teóricos que nos permitirán obtener la factorización de Cholesky para matrices definidas positivas.

4.2.1. Conceptos básicos

Definición: *Una función $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ será una* ***forma cuadrática (fc)*** *si para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene que*

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} m_k\, x_k^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij}\, x_i x_j,$$

donde $m_k, r_{ij} \in \mathbb{R}$ para $k, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $i < j$.

Es decir, las formas cuadráticas son un tipo especial de polinomios con n variables que sólo tienen coeficientes distintos de cero en los términos cuya potencia es exactamente 2.

Ejemplos:

1. Las formas cuadráticas $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tendrán la siguiente estructura:

$$Q(x, y) = m_1 x^2 + m_2 y^2 + r_{12} xy.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
Q(x,y) &= (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \ \text{ es una fc} \\
Q(x,y) &= (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \ \text{ es una fc} \\
Q(x,y) &= (x-2y+1)^2 = x^2 + 4y^2 + 1 - 4xy + 2x - 4y \ \text{ no es una fc, pues tiene} \\
&\quad \text{términos lineales } (2x \text{ y } -4y) \text{ y un término libre } (1). \\
Q(x,y) &= 0 \quad \text{sí es una fc, pues } m_1 = m_2 = r_{12} = 0.
\end{aligned}$$

2. $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es fc si es de la forma

$$Q(x, y, z) = m_1\, x^2 + m_2\, y^2 + m_3\, z^2 + r_{12}\, xy + r_{13}\, xz + r_{23}\, yz$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
Q(x,y,z) &= (x - y + 2z)^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz \ \text{ es una fc.} \\
Q(x,y,z) &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ 4y + z \\ x + 2y + 3z \end{pmatrix} \\
&= 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 - xy + 3xz + 3yz \quad \text{es una fc.}
\end{aligned}$$

El último ejemplo, en el que se describe una forma cuadrática por una expresión del tipo $x^T Ax$, con A matriz cuadrada y x vector columna es el caso general.

De hecho, si consideramos una matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ y un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tenemos que

$$\begin{aligned} x^T Ax &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^{n} a_{1r}x_r \\ \sum_{r=1}^{n} a_{2r}x_r \\ \sum_{r=1}^{n} a_{3r}x_r \\ \vdots \\ \sum_{r=1}^{n} a_{nr}x_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{s=1}^{n} x_s \sum_{r=1}^{n} a_{sr}\, x_r = \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{sr}\ x_s x_r \end{aligned}$$

Entonces, $x^T Ax$ es un polinomio con n variables que sólo contiene términos de grado 2, es decir, $x^T Ax$ es una forma cuadrática.

Los términos con x_i^2 se obtienen cuando $s = r = i$ en la suma, luego el coeficiente de x_i^2 es a_{ii} para $i = 1, 2, \ldots, n$. Además, la suma tiene dos términos con $x_i x_j$ (cuando $s = i, r = j$ y cuando $s = j, r = i$), así que el coeficiente de $x_i x_j$ es $(a_{ij} + a_{ji})$.

Ahora, al considerar una forma cuadrática dada por

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k\, x_k^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} r_{ij}\, x_i x_j,$$

es directo ver que basta tomar una matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ que cumpla $a_{ii} = m_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $a_{ij} + a_{ji} = r_{ij}$ para $i, j = 1, 2, \ldots, n$ con $i < j$, para tener que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Q(x) = x^T Ax$$

Definición: *Sea $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Diremos que una matriz A de $n \times n$ **representa** a la fc Q si y sólo si*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Q(x) = x^T Ax$$

Nota : Dada una forma cuadrática Q, existen infinitas matrices que la representan. Por ejemplo, si $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma cuadrática definida por

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 - xy + 3xz + 3yz$$

(ver el último ejemplo), entonces todas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

representan a Q (¡Compruébelo!). Pero existe una única matriz simétrica que representa a Q (en este caso, A_4).

Teorema. *Sea $Q(x) = x^T Ax$ una forma cuadrática de $\mathbb{R}^n$ (A es una matriz cualquiera que representa a Q). Entonces existe una única matriz simétrica S que representa a Q.*

Demostración: Dividiremos la demostración en dos partes: (i) probaremos la existencia de una matriz simétrica que representa a Q y (ii) probaremos que esta matriz simétrica es única.

(i) Para demostrar la existencia, notemos que si A representa a Q, entonces A^T también representa a Q. Es decir, si $Q(x) = x^T Ax$, entonces $Q(x) = x^T A^T x$.

Pero esto es claro, pues los elementos de la diagonal de A^T coinciden con los elementos de la diagonal de A (es decir, en ambos casos el coeficiente del término x_i^2 es a_{ii}). El coeficiente del término "cruzado" $x_i x_j$ es $(a_{ij} + a_{ji})$, pero al transponer la matriz, el coeficiente de $x_i x_j$ es $(a_{ji} + a_{ij})$ y nuevamente coinciden.

De esta manera,

$$2Q(x) = Q(x) + Q(x) = x^T Ax \ + \ x^T A^T x = x^T \big(Ax + A^T x\big) = x^T \big(A + A^T\big)x$$

Y, por tanto,

$$Q(x) = \frac{1}{2} x^T \big(A + A^T\big)x = x^T \left(\frac{A + A^T}{2}\right) x$$

Entonces, la matriz $\dfrac{A + A^T}{2}$ representa a Q y, además, es simétrica, pues

$$\left(\frac{A + A^T}{2}\right)^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = \left(\frac{A + A^T}{2}\right)$$

Entonces, existe al menos una matriz simétrica que representa a Q.

(ii) Ahora debemos probar la unicidad de la matriz simétrica que representa a Q.

Pero primero probaremos el siguiente hecho:

$$\boxed{\text{Si } S \text{ es simétrica y } \forall x \in \mathbb{R}^n \ x^T Sx = 0, \text{ entonces } S = \mathbb{O}.} \qquad (*)$$

Si tomamos $x = e_1$, tendremos que $0 = e_1^T S e_1 = s_{11}$.

Si tomamos $x = e_2$, tendremos que $0 = e_2^T S e_2 = s_{22}$.

Si tomamos $x = e_3$, tendremos que $0 = e_3^T S e_3 = s_{33}$.

$\vdots$

Si tomamos $x = e_n$, tendremos que $0 = e_n^T S e_n = s_{nn}$.

Con esto, hemos probado que la diagonal de S sólo contiene ceros.

Ahora probaremos que cualquier elemento de S que está fuera de la diagonal también es cero. Para esto, notemos que $s_{ij} = e_i^T S e_j$, pero no podemos saber cuánto vale este elemento.

Si tomamos $x = (e_i + e_j)$, tendremos que

$$\begin{aligned} 0 = (e_i + e_j)^T S(e_i + e_j) &= (e_i^T + e_j^T)Se_i + (e_i^T + e_j^T)Se_j \\ &= e_i^T Se_i + e_j^T Se_i + e_i^T Se_j + e_j^T Se_j \\ &= 0 + s_{ji} + s_{ij} + 0 \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $s_{ij} + s_{ji} = 0$.

Pero como $S^T = S$, se tiene que $s_{ij} = s_{ji}$, tenemos que $2s_{ij} = 0$, de donde obtenemos que $s_{ij} = 0$.

Por tanto, $S = \mathbb{O}$ y hemos probado la afirmación (*).

Ahora, concluimos la demostración de unicidad.

Debemos probar que si $Q(x) = x^T S_1 x$ y $Q(x) = x^T S_2 x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, con S_1 y S_2 simétricas, entonces $S_1 = S_2$.

Pero si $Q(x) = x^T S_1 x = x^T S_2 x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $x^T S_1 x - x^T S_2 x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x^T\big(S_1 - S_2\big)x = 0$$

y además, tenemos que $S_1 - S_2$ es simétrica, entonces por (*) se tiene que $S_1 - S_2 = \mathbb{O}$, es decir, $S_1 = S_2$.

Con este teorema, hemos probado que a cada forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ le corresponde una única matriz simétrica S y que a cada matriz simétrica le corresponde una única forma cuadrática. Asociamos, de ahora en adelante, las formas cuadráticas con las matrices simétricas.

Por tanto, desde ahora, anotamos cada forma cuadrática Q por su representación con la matriz simétrica asociada a Q, es decir,

$$Q(x) = x^T S x$$

y todas las propiedades de las formas cuadráticas que estudiaremos a continuación se realizarán a través de su matriz simétrica asociada.

4.2.2. Clasificación de las formas cuadráticas

El método más difundido para clasificar las formas cuadráticas, se basa en el estudio de su recorrido. Lo primero que debemos notar es que si Q es una fc en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$Q(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}^T S \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}^T \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{0} = 0 \in \mathbb{R}$$

Definición: *Sea $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática con matriz simétrica S. Entonces:*

- *Q (y su matriz S) es **definida positiva** si para todo vector $x \neq \overrightarrow{0}$ de $\mathbb{R}^n$ se tiene que*

$$Q(x) = x^T S x > 0$$

- *Q (y su matriz S) es **semidefinida positiva** si para todo vector x de $\mathbb{R}^n$ se tiene que*

$$Q(x) = x^T S x \geq 0$$

- *Q (y su matriz S) es **definida negativa** si para todo vector $x \neq \overrightarrow{0}$ de $\mathbb{R}^n$ se tiene que*

$$Q(x) = x^T S x < 0$$

- *Q (y su matriz S) es **semidefinida negativa** si para todo vector x de $\mathbb{R}^n$ se tiene que*

$$Q(x) = x^T S x \leq 0$$

- *Q (y su matriz S) es **no definida** si existe un vector x_1 tal que $Q(x_1) = x_1^T S x_1 > 0$ y existe otro vector x_2 tal que $Q(x_2) = x_2^T S x_2 < 0$.*

Ejemplos: Clasifiquemos las siguientes formas cuadráticas:

1. $Q_1(x,y,z) = 5x^2 + 3y^2 + 9z^2$ es semidefinida positiva, pues $Q_1(x,y,z) \geq 0$ para cualquier vector (x,y,z). Pero, además, se tiene que

$$Q_1(x) = 0 \Longleftrightarrow 5x^2 + 3y^2 + 9z^2 = 0 \Longleftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

   Por lo tanto, si $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, tendremos $Q_1(x,y,z) > 0$. Es decir, Q_1 **es definida positiva**.

2. $Q_2(x,y,z,t) = -x^2 - 9y^2 - \sqrt{2}z^2 - 7t^2$ **es definida negativa**, pues $Q_2(x,y,z,t) \leq 0$ para todo vector de $\mathbb{R}^4$. Pero cuando analizamos dónde se hace cero, tenemos que

$$Q_2(x,y,z,t) = 0 \Longleftrightarrow -x^2 - 9y^2 - \sqrt{2}z^2 - 7t^2 = 0 \Longleftrightarrow (x,y,z,t) = (0,0,0,0),$$

   por tanto, para todo vector distinto del vector será la fc será estrictamente negativa.

   Notemos que una fc $Q(\overrightarrow{x})$ es definida negativa si y sólo si $-Q(\overrightarrow{x})$ es definida negativa.

3. $Q_3(x,y,z) = 8x^2 - 3y^2 + 2z^2$ es una forma cuadrática **no definida**, pues

$$Q_3(1,0,1) = 8 + 2 = 10 > 0 \quad \text{y} \quad Q_3(0,1,0) = -3 < 0$$

4. $Q_4(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$ es semidefinida positiva, pues podemos reescribirla como $Q_4(x,y) = (x+y)^2 \geq 0$. Estudiemos dónde se hace cero, para decidir si, además, es definida positiva:

$$Q_4(x,y) = 0 \Longleftrightarrow (x+y)^2 = 0 \Longleftrightarrow x + y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (-y,y) = y(-1,1)$$

   Entonces tenemos vectores distintos de cero en los cuales Q_4 vale cero. Esto significa que Q_4 no es definida positiva, sólo **es semidefinida positiva**.

   Además, como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, vemos que Q_4 alcanza su valor mínimo, que es cero, en toda la recta $L = \langle(-1,1)\rangle$.

Las formas cuadráticas que consideramos en los ejemplos son bastante simples. De hecho, salvo en el ejemplo 4, las matrices simétricas asociadas a todas las formas cuadráticas son diagonales.

Clasificar este tipo de formas cuadráticas es muy simple.

Teorema. *Sean* $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$ *y* $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una forma cuadrática con matriz simétrica asociada* D*. Entonces:*

(*i*) Q *(y su matriz* D*) es definida positiva si y sólo si* $d_{ii} > 0$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$.

(*ii*) Q *(y su matriz* D*) es semidefinida positiva si y sólo si* $d_{ii} \geq 0$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$.

(*iii*) Q *(y su matriz* D*) es definida negativa si y sólo si* $d_{ii} < 0$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$.

(*iv*) Q *(y su matriz* D*) es semidefinida negativa si y sólo si* $d_{ii} \leq 0$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$.

(*v*) Q *(y su matriz* D*) es no definida si y sólo si existen* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *tales que* $d_{ii} > 0$ *y* $d_{jj} < 0$.

Demostración: Probaremos (i), el resto de las afirmaciones quedan propuestas.
Basta notar que para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$Q(x) = d_{11}x_1^2 + d_{22}x_2^2 + \cdots + d_{nn}x_n^2$$

Supongamos que Q es definida positiva. Entonces $Q(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. En particular, $Q(e_1) = d_{11} > 0$, $Q(e_1) = d_{22} > 0$, $\ldots$, $Q(e_n) = d_{nn} > 0$.

Si ahora suponemos que $d_{11} > 0$, $d_{22} > 0$, $\ldots$, $d_{nn} > 0$, entonces $d_{ii}x_i^2 \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $Q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Además, se tiene que

$$Q(x) = 0 \Longleftrightarrow d_{11}x_1^2 + d_{22}x_2^2 + \cdots + d_{nn}x_n^2 = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} d_{11}x_1^2 & = & 0 \\ d_{22}x_2^2 & = & 0 \\ & \vdots & \\ d_{nn}x_n^2 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_n & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x = 0$$

Entonces, para todo $x \neq 0$ tendremos que $Q(x) > 0$. Por tanto, Q es definida positiva.

¿Cómo clasificamos una forma cuadrática cuya matriz simétrica no es diagonal?

Consideremos la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = 4x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 5xy - 6yz + 3xz$$

Para clasificarla, usaremos su representación matricial:

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 3 & -3 \\ \frac{3}{2} & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y calcularemos la primera factorización de Cholesky de la matriz de Q:

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 3 & -3 \\ \frac{3}{2} & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ F_2 + \frac{5}{8}F_1 \\ F_3 - \frac{3}{8}F_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 4 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{23}{16} & -\frac{33}{16} \\ 0 & -\frac{33}{16} & \frac{71}{16} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ F_3 + \frac{33}{23}F_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 4 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{23}{16} & -\frac{33}{16} \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} \end{pmatrix} = U$$

Entonces $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{8} & 1 & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{33}{23} & 1 \end{pmatrix}$ y como S es una matriz simétrica con una factorización LU, entonces $U = DL^T$ con $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{23}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} \end{pmatrix}$.

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{8} & 1 & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{33}{23} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{23}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{33}{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c} x - \frac{5}{8}y + \frac{3}{8}z & y - \frac{33}{23}z & z \end{array} \right) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{23}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{34}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{5}{8}y + \frac{3}{8}z \\ y - \frac{33}{23}z \\ z \end{pmatrix} \\ &= 4\left(x - \frac{5}{8}y + \frac{3}{8}z\right)^2 + \frac{23}{16}\left(y - \frac{33}{23}z\right)^2 + \frac{34}{23}z^2 \end{aligned}$$

Y, ahora, es claro que $Q(x, y, z) \geq 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ así que ya sabemos que Q es semidefinida positiva. Estudiamos dónde se hace cero esta función para decidir si es definida positiva:

$$Q(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - \frac{5}{8}y + \frac{3}{8}z & = & 0 \\ y - \frac{33}{23}z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Entonces Q es definida positiva.

Este procedimiento será el estándar. Lo resumimos en el siguiente teorema.

Teorema. *Sea S una matriz simétrica que tiene una factorización de Cholesky sin raíz, es decir, $S = LDL^T$, donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y $D = (d_{ij})$ es una matriz diagonal y sea $Q(x) = x^T Sx$. Entonces:*

(i) Q (y la matriz S) es definida positiva si y sólo si $d_{ii} > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) Q (y la matriz S) es semidefinida positiva si y sólo si $d_{ii} \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

(iii) Q (y la matriz S) es definida negativa si y sólo si $d_{ii} < 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

(iv) Q (y la matriz S) es semidefinida negativa si y sólo si $d_{ii} \leq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

(v) Q (y la matriz S) es no definida si y sólo si existen $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $d_{ii} > 0$ y $d_{jj} < 0$.

Demostración: Como $S = LDL^T$, tenemos que

$$Q(x) = x^T Sx = x^T LDL^T x = (L^T x)^T D(L^T x)$$

Y haciendo la sustitución de variables $u = L^T x$. Entonces:

$$Q(x) = Q(u(x)) = Q(u) = u^T Du, \text{ donde } u(x) = L^T x$$

Cuando $u \neq 0$, tendremos que:

- $u^T Du > 0 \iff d_{ii} > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.
- $u^T Du \geq 0 \iff d_{ii} \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.
- $u^T Du < 0 \iff d_{ii} < 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.
- $u^T Du \leq 0 \iff d_{ii} \leq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pero, como $u = L^T x$ y L^T es una matriz invertible, tendremos que la única solución del sistema $L^T x = 0$ es $x = 0$, lo que significa que

$$u \neq 0 \iff L^T x \neq 0 \iff x \neq 0$$

Con esto, hemos probado las afirmaciones (i), (ii), (iii) y (iv).
Para la afirmación (v), supongamos que $Q(x)$ es no definida, entonces existen dos vectores distintos x_1 y x_2 tales que $Q(x_1) > 0$ y $Q(x_2) < 0$. Entonces $u_1 = L^T x_1$ y $u_2 = L^T x_2$ son dos vectores distintos (pues L^T es invertible) tales que $u_1^T Du_1 > 0$ y $u_2^T Du_2 < 0$, luego, existen $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $d_{ii} > 0$ y $d_{jj} < 0$.
Si ahora suponemos que existen $d_{ii} > 0$ y $d_{jj} < 0$, entonces $e_i^T De_i > 0$ y $e_j^T De_j < 0$ y tomando $x_1 = (L^T)^{-1} e_i$, $x_2 = (L^T)^{-1} e_j$, habremos encontrado dos vectores distintos para los cuales tenemos que $Q(x_1) > 0$ y $Q(x_2) < 0$ y Q es no definida.

Nota 1: Usando la factorización $S = LDL^T$, podremos escribir la fc $Q(x) = x^T Sx$ como una suma ponderada de términos al cuadrado. Así, por ejemplo,

$$Q(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + z^2 + 2xy - xz + 8yz \iff Q(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -3 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 4 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}$$

Y

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -3 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + \frac{1}{2}F_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -4 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 + \frac{9}{8}F_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -4 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{93}{16} \end{pmatrix}$$

Luego, si $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{9}{8} & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{93}{16} \end{pmatrix}$, entonces $S = LDL^T$ y tomando

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = L^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - \frac{1}{2}z \\ y - \frac{9}{8}z \\ z \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$Q(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}^T S \overrightarrow{x} = \overrightarrow{u}^T D \overrightarrow{u} = u^2 - 4v^2 + \frac{93}{16}w^2 = (x + y - \tfrac{1}{2}z)^2 - 4(y - \tfrac{9}{8}z)^2 + \tfrac{93}{16}z^2$$

El proceso para escribir una forma cuadrática como suma ponderada de términos cuadrados se conoce como la **diagonalización de la forma cuadrática**.

Nota 2: No toda forma cuadrática puede ser diagonalizada. De hecho, la forma cuadrática $Q(x, y) = 2xy$ no tiene diagonalización, pues su matriz simétrica $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene factorización LU. A pesar de esto, podemos clasificar esta forma cuadrática que resulta ser no definida, pues $Q(1, 3) > 0$, pero $Q(-1, 2) < 0$.

4.3. Matrices definidas positivas

En esta sección vamos a estudiar las principales propiedades de las matrices definidas positivas y las caracterizaremos a través de la Factorización de Cholesky con raíces.

4.3.1. Propiedades de las matrices definidas positivas

Primero, recordemos dos hechos fundamentales que a menudo se olvidan:

1. Todas las matrices definidas positivas son simétricas, pues son las matrices asociadas a las formas cuadráticas definidas positivas.
2. Una matriz S es definida negativa si y sólo si $-S$ es definida positiva. Con esto, será obvio que los siguientes resultados también se extienden para matrices definidas negativas.

Teorema. *Si S es una matriz definida positiva, entonces S es invertible.*

Demostración: Supongamos que S es definida positiva, pero no invertible. Entonces el sistema $Sx = 0$ tiene infinitas soluciones. Es decir, existe un vector $x_0 \neq 0$ tal que $Sx_0 = 0$ y, por tanto, $x_0^T S x_0 = x_0^T (S x_0) = x^T 0 = 0$. Esto contradice el hecho de que S es definida positiva.
Así, es necesario que S sea invertible.

Para establecer el siguiente resultado, definiremos las submatrices principales de una matriz cuadrada.

Definición: *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$. Las submatrices pricipales de A son las matrices A_1, A_2, ..., A_n tales que , para $k = 1, 2, \ldots, n$, A_k es una matriz de $k \times k$ y su elemento en la posición (i, j) es a_{ij}.*

Es decir, las submatrices pricipales de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ son: $A_1 = (1)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}, A_6 = A.$$

Teorema. *Si S es una matriz definida positiva, entonces todas las submatrices principales de S son definidas positivas.*

Demostración: Sabemos que para todo $x \neq 0$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene que $x^T S x > 0$. Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, debemos probar que $x_k^T S_k x_k > 0$, donde x_k es cualquier vector no nulo de $\mathbb{R}^k$.
Sea $x_k = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ un vector no nulo de $\mathbb{R}^k$. Entonces $x = (a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$ y como es claro que

$$x^T S x = x_k^T S_k x_k$$

, tenemos que S_k es una matriz definida positiva.

Una consecuencia directa de los dos teoremas anteriores.

Corolario. *Todas las submatrices principales de una matriz definida positiva son invertibles.*

Teorema. *Si S es una matriz definida positiva, entonces S tiene una factorización LU (es decir, S se puede escalonar sin hacer intercambios de filas).*

Demostración: Como $S = (s_{ij})$ es definida positiva, todas sus submatrices principales son invertibles. Entonces, en particular, $S_1 = (s_{11}) \neq \mathbb{O}$, es decir, $s_{11} \neq 0$ y podremos pivotear para eliminar todos los elementos bajo este primer pivote, sin necesidad de intercambiar filas.
Pero cuando hacemos la operación $F_2 - \frac{s_{21}}{s_{11}} F_1$ para eliminar el segundo elemento de la primera columna, al mismo tiempo estamos escalonando la submatriz S_2 y como es invertible, el nuevo elemento ubicado en la posición $(2, 2)$ de S y de S_2 debe ser distinto de cero (de hecho, sabemos que deberá ser positivo pues S_2 es definida positiva). Por tanto, no es necesario intercambiar filas para eliminar los elementos que están bajo el segundo pivote.
Recursivamente, siguiendo este procedimiento, notamos que al escalonar S estamos escalonando todas las submatrices principales de S al mismo tiempo y siempre obtendremos pivotes positivos, por lo que nunca necesitaremos intercambiar filas para terminar el pivoteo y llegar a U. Obteniendo la factorización LU de S.

4.3.2. Segunda Factorización de Cholesky

Sea S una matriz definida positiva. Entonces, $S = LU$ y, de hecho, por ser simétrica, $S = LDL^T$. Además sabemos que D tiene sólo elementos estrictamente positivos en su diagonal.

Entonces, podemos hacer la siguiente factorización de D:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix}$$

Si ponemos $\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix}$, tendremos que $\sqrt{D}^T = \sqrt{D}$ y, por tanto,

$$D = \sqrt{D}\ \sqrt{D}^T$$

Entonces obtendremos la Fractorización de Cholesky con raíces para S:

$$S = L\sqrt{D}\ \sqrt{D}^T L^T = \left(L\sqrt{D}\right)\ \left(L\sqrt{D}\right)^T$$

Llamamos K a la matriz $L\sqrt{D}$, que es una matriz triangular inferior con números estrictamente positivos en la diagonal.

Con esto, ya tenemos probado el siguiente teorema:

Teorema. *Sea S una matriz simétrica. Entonces S es definida positiva si y sólo si existe una matriz K triangular inferior con elementos estrictamente positivos en la diagonal tal que*

$$S = KK^T.$$

El siguiente corolario refleja el último teorema en lenguaje de formas cuadráticas.

Corolario. *Sea Q una forma cuadrática. Entonces Q es definida positiva si y sólo si $Q(x)$ se puede escribir como una suma de términos cuadrados.*

Ejemplo: Consideremos la forma cuadrática $Q(x,y,z) = 3x^2 + 7y^2 + 8z^2 - 6xy + 6xz - 14yz$. Entonces, su matriz simétrica es:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 7 & -7 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 + F_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y podemos concluir que Q es definida positiva, la escribiremos como una suma de términos positivos. Para esto, calculamos la factorización de Cholesky con raíces de S.

Tenemos que $\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $K = L\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Así,

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \left(\sqrt{3}x - \sqrt{3}y\right)^2 + \left(2y - 2z\right)^2 + z^2 \end{aligned}$$

Concluimos con un ejercicio "tipo prueba".

Ejercicio: Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(a,b,c) = 9 - 5(a-3)^2 + 20(a-3)(b+2) + 30(a-3)c - 22(b+2)^2 - 52(b+2)c - 53c^2$$

a) Haciendo el cambio de variables $(x,y,z) = (a-3, b+2, c)$, demuestre que la forma cuadrática

$$q(x,y,z) = f(a,b,c) - 9$$

es semidefinida negativa.

b) Encuentre el conjunto de todos los vectores $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ para los cuales $q(x,y,z) = 0$ y, usando esto, concluya que 9 es el valor máximo que alcanzará la función f y determine todos los puntos (a,b,c) en los cuales f alcanza este valor.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= -5x^2 + 20xy + 30xz - 22y^2 - 52yz - 53z^2 \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ 10 & -22 & -26 \\ 15 & -26 & -53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Basta probar que la matriz $A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ 10 & -22 & -26 \\ 15 & -26 & -53 \end{pmatrix}$ es semidefinida negativa.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ 10 & -22 & -26 \\ 15 & -26 & -53 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{matrix} &\sim \begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 + 2F_1 \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U \end{aligned}$$

Aquí, ya puede concluirse que A es semidefinida negativa, pues los elementos de la diagonal de U (y de D) son -5, -2 y 0. Por lo tanto, la forma cuadrática $q(x,y,z) \leq 0$ para todo $(x,y,z) \neq 0$.

b) Para determinar los vectores pedidos, calculamos la factorización de Cholesky de A. Pero, por la parte anterior,

$$\begin{aligned} A &= LU \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= LDL^T \end{aligned}$$

Luego, la forma cuadrática queda

$$q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} LDL^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y, poniendo $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = L^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y - 3z \\ y - 2z \\ z \end{pmatrix}$, se tiene que

$$q(w) = -5w_1^2 - 2w_2^2 = -5(x - 2y - 3z)^2 - 2(y - 2z)^2.$$

Por lo tanto, $q(x,y,z) = 0$ si y sólo si

$$\begin{cases} x - 2y - 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el conjunto de los vectores (x, y, z) para los cuales $q(x, y, z) = 0$ es la recta

$$\langle\{(7, 2, 1)\}\rangle.$$

Ahora, como $q(\overrightarrow{x}) \leq 0$ para todo $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$f(a, b, c) = 9 + q(x, y, z) \leq 9 \quad \text{y} \quad f(3, -2, 0) = 9.$$

De donde se concluye que 9 es el valor máximo de la función f.
Además, $f(a, b, c) = 9$ si y sólo si $q(x, y, z) = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} f(a,b,c) = 9 &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a-3 \\ b+2 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, el conjunto de puntos en que f alcanza su máximo es la recta

$$(3, -2, 0) + \langle\{(7, 2, 1)\}\rangle.$$

MAT1203 Álgebra Lineal

Guía N° 4 – Matrices elementales y Factorizaciones matriciales

1. Sean A una matriz de $m \times n$ y M una matriz elemental de orden $n \times n$. Determine como se relaciona la matriz $A' = AM$ con A. (Recuerde que si E es una matriz elemental de orden $m \times m$, entonces la matriz $A'' = EA$ se obtiene al realizar en A la operación elemental representada por E.) Sugerencia: Considere, por separado, los casos: $M = P_{ij}$, $M = E_{i(c)}$ y $M = E_{ij(c)}$.

2. Si $P = P_1 P_2 \cdots P_k$, donde las P_i son matrices elementales de permutación, demuestre cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) P es la matriz identidad con sus filas "permutadas".

   b) $P^{-1} = P^T$.

   c) Por medio de un ejemplo, pruebe que, en general, $P^{-1} \neq P$ (esto equivale a probar que, en general, $P^T \neq P$).

3. *a*) Demuestre que el producto de matrices triangulares inferiores con 1s en su diagonal es triangular inferior con 1s en su diagonal y que el producto de triangulares superiores es triangular superior.

   b) Demuestre que la inversa de un matriz triangular superior existe si y sólo si los elementos de su diagonal son no nulos.

   c) Demuestre que la inversa de una triangular inferior con 1s en la diagonal es triangular inferior con 1s en la diagonal y que la inversa de una triangular superior es triangular superior (cuando existe).

   d) Usando todo lo anterior, demuestre que si A tiene inversa y $A = L_1U_1 = L_2U_2$, entonces $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$, es decir, la factorización $A = LU$ es única cuando A es invertible.

4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule la factorización $PA = LU$.

   b) Escriba las filas de A como combinaciones lineales de las filas de U y las filas de U como combinaciones lineales de las filas de A.

   c) Escriba L y L^{-1} como el producto de matrices elementales.

5. Si

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

   y B es una matriz que se obtiene de A, sumando dos veces la primera fila a la tercera, luego, intercambiando la segunda y la tercera filas y, por último, amplificando la primera fila por -3. Determine B^{-1}.

6. Suponga que la matriz A se factoriza como $PA = LU$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & a & 1 & 8 \\ c & d & e & f \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Determine la solución de $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y todos los vectores $b \in \mathbb{R}^3$ para los cuales el sistema $Ax = b$ es compatible.

7. Sean

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $A = LU$. Determine todos los vectores de $b \in \mathbb{R}^5$ para los cuales el sistema $Ax = b$ no tiene solución.

8. Suponga que A satisface la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $u_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$, encuentre todos los vectores $b \in \mathbb{R}^5$ para los cuales el sistema $Ax = b$ no tiene solución.

9. Suponga que A de $m \times n$ se factoriza como $A = LU$, con L triangular inferior con 1s en la diagonal y U es triangular superior. Demuestre que U tiene inversa por izquierda si y sólo si A tiene inversa por izquierda.

10. Sea A una matriz tal que $PA = LU$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Determine la solución de $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   b) Determine la solución de $A^T x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   c) Determine solamente la segunda columna de A^{-1}.

   d) Determine el elemento de A^{-1} ubicado en la segunda fila y en la tercera columna.

11. *a*) Sean A y B dos matrices simétricas tales que A es definida positiva y B es semidefinida positiva. Demuestre que si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ entonces la matriz $\alpha A + \beta B$ es simétrica definida positiva.

    b) Sea C una matriz invertible. Demuestre que la matriz A es simétrica y definida positiva si y sólo si la matriz $C^T AC$ es simétrica y definida positiva.

    c) Sea A una matriz invertible. Demuestre que A es simétrica y definida positiva si y sólo si A^{-1} es simétrica y definida positiva.

    d) Demuestre que si A es una matriz simétrica y definida positiva, entonces A^n también es simétrica y definida positiva para todo $n \in \mathbb{N}$.

    e) Sea F una matriz cualquiera de orden $m \times n$. Demuestre que las matrices $F^T F$ y FF^T son simétricas y semidefinidas positivas. Determine condiciones sobre F para que se garantice que $F^T F$ y FF^T sean definidas positivas.

    f) Sea G una matriz simétrica e invertible. Demuestre que G^{2k} es simétrica y definida positiva para todo $k \in \mathbb{Z}$.

12. Sea A simétrica y definida positiva de orden n y sea B una matriz de $n \times 1$. Pruebe que $C = 2A^3 + 3BB^T$ es simétrica y definida positiva.

13. El siguiente método permite, mediante la factorización de Cholesky, encontrar la inversa de cualquier matriz invertible. Justifique o demuestre, según corresponda, cada paso y aplique el método para calcular la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 11 & 14 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz invertible de orden n y sea $B = A^T A$.

i) Existe una matriz K triangular inferior con elementos positivos en la diagonal, tal que $B = KK^T$.

ii) El sistema matricial $KX = A^T$ tiene solución única.

iii) El sistema matricial $K^T Y = X$ tiene solución única.

iv) La matriz Y encontrada en el punto anterior es la inversa de A.

14. Sea A una matriz simétrica de orden n que puede factorizarse $A = LU$. Demuestre que A es definida positiva si y sólo si todos los pivotes de U son positivos. ¿Cómo son los pivotes de U cuando A es semidefinida positiva, definida negativa o semidefinida negativa?

15. Sean α y β dos números reales distintos de cero. Determine los valores de x para los cuales la matriz

$$B = \begin{pmatrix} x & 1 & \alpha \\ 1 & 4 & \alpha+\beta \\ \alpha & \alpha+\beta & \frac{\beta^2}{5}+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

es definida positiva independientemente de los valores de α y β.

16. Determine condiciones para x e y de modo que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y \\ x & x & x & x & x & x & 1+6y \end{pmatrix}$$

sea definida positiva.

17. Clasifique las siguientes formas cuadráticas. Determine la "escritura diagonal" de cada forma .

a) $q(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 16x_3^2$

b) $q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_1x_4 + 6x_2^2 + 20x_2x_3 + 12x_2x_4 + 19x_3^2 + 8x_3x_4 + 28x_4^2$

c) $q(x) = 2x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 10x_2^2 - 8x_2x_3 + 4x_2x_4 + 19x_3^2 + 8x_3x_4 + 3x_4^2$

d) $q(x,y,z,t) = x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 3t^2 - 2xy - 2xt - 6yt + 4yz - 2zt$

e) $q(x,y,z,t) = 16x^2 + 5y^2 + 67z^2 + 46t^2 - 16xy - 24xz + 8xt + 26yz + 4yt + 38zt$

18. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Diagonalice la forma cuadrática asociada a AA^T.

19. Considere la forma cuadrática $Q(x,y,z) = x^2 + 2axy + y^2 + 2yz + 4z^2$.

a) Determine todos los valores de a para los cuales Q es definida positiva.

b) Para los valores de a encontrados, escriba Q como suma de cuadrados.

20. Determine todas las formas cuadráticas $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que son definidas positivas.

RESPUESTAS:

4.a. $P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&2&-1&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}$ y $U=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

4.b. Si $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\\A_5\end{pmatrix}$ y $U=\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\\U_5\end{pmatrix}$, entonces $A_1=U_1$, $A_2=U_1+U_3+U_5$, $A_3=U_3$, $A_4=U_1+U_2$ y $A_5=U_1+2U_2-U_3+U_4$. Además, $U_1=A_1$, $U_2=A_4-A_1$, $U_3=A_3$, $U_4=A_1+A_3-2A_4+A_5$.

4.c. $L=E_{21(1)}E_{41(1)}E_{51(1)}E_{42(2)}E_{43(-1)}E_{53(1)}$ y $L^{-1}=E_{53(-1)}E_{43(1)}E_{42(-2)}E_{51(-1)}E_{41(-1)}E_{21(-1)}$.

5. $B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}c&c&b\\-\frac{1}{3}d+\frac{2}{3}f&f&e\\-\frac{1}{3}g+\frac{2}{3}i&i&h\end{pmatrix}$ **6.** El sistema $Ax=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ no tiene solución y el sistema $Ax=b$ es compatible si y sólo si $b\in\langle\{(1,0,-1),(0,1,1)\}\rangle$. **7.** $Ax=b$ no tiene solución si y sólo si $b\notin\langle\{(1,0,0,1,-1),(0,1,0,1,0),(0,0,1,1,1)\}\rangle$. **8.** $Ax=b$ no tiene solución si y sólo si $b\notin\langle\{(1,0,0,0,3),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,-1),(0,0,0,1,2)\}\rangle$. **10.a.** $x=(-\frac{7}{2},-4,2)$

10.b. $x=(-10,6,-1)$ **10.c.** La segunda columna de A^{-1} se obtiene resolviendo $Ax=e_2$ y es el vector $(\frac{3}{2},2,-1)^T$. **10.d.** El elemento buscado es 0.

15. No existen valores de x que hagan la matriz definida positiva para todo valor de α y de β.

16. $\frac{1}{6}>y(x-1)$. **17.a.** q es definida positiva y $q(x)=2(x_1-x_2+x_3)^2+3(x_2+2x_3)^2+2x_3^2$ **b.** q es definida positiva y $q(x)=(x_1+2x_2+3x_3+4x_4)^2+2(x_2+2x_3-x_4)^2+2(x_3-2x_4)^2+2x_4^2$ **c.** q es definida positiva y $q(x)=2(x_1-2x_2+2x_3)^2+2(x_2+2x_3+x_4)^2+3x_3^2+x_4^2$ **d.** q no puede ser clasificada, pues $q(x)=(x_1-x_2-x_4)^2+4(x_2+\frac{1}{2}x_3-x_4)^2+3(x_3+\frac{1}{3}x_4)^2-\frac{7}{3}x_4^2$ **e.** q es definida positiva y $q(x)=16(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4)^2+(x_2+7x_3+4x_4)^2+9(x_3-\frac{2}{3}x_4)^2+25x_4^2$

18. $Q(x,y)=3(x+\frac{1+a}{3}y)^2+\frac{2}{3}(a^2-a+1)y^2$. **19.a.** $a\in\left]-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$ **b.** $Q(x,y,z)=(x+ay)^2+(1-a^2)(y+\frac{1}{1-a^2}z)^2+\frac{3-4a^2}{1-a^2}z^2$.