PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Ayudantía11 - MAT1203

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) **Valores propios.** El polinomio característico es

   $$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 3)(\lambda - 5)(\lambda - 10).$$

   Por lo tanto, los valores propios son $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 10$

   b) **Espacios propios.** Resolvemos $(A - \lambda I)x = 0$ en cada caso:

   - Para $\lambda = 3$, $A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, de donde se obtiene $E_3 = Nul(A - 3I) = Gen\{(0, 0, 1)\}$.
   - Para $\lambda = 5$, $A - 5I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}$, y una base es $\{(2, 1, 9)\}$. Por tanto $E_5 = Gen\{(2, 1, 9)\}$.
   - Para $\lambda = 10$, $A - 10I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & -7 \end{pmatrix}$, y una base es $\{(-7, 14, 11)\}$. Por tanto $E_{10} = Gen\{(-7, 14, 11)\}$.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) **Valores propios.** Como A es triangular superior, sus valores propios son las entradas de la diagonal: $\lambda = 4, \quad \lambda = 2$.

   b) **Valores de h para que $\dim E_4 = 2$.** Notamos que $A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Las filas tercera y cuarta son proporcionales, por lo que aportan a lo más un pivote. Para que $\dim Nul(A - 4I) = 2$ (esto es, nulidad $= 2$ en una matriz 4×4), necesitamos $\text{rango}(A - 4I) = 2$. Eso exige que las dos primeras filas sean linealmente dependientes en las columnas

2–3 (las únicas con posibles pivotes distintos de la columna 4). El menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & h \end{vmatrix} = 2h+6$ debe anularse, lo que da $h = -3$.

Para $h = -3$ se verifica $\text{rango}(A - 4I) = 2$ y, por ende, $\dim E_4 = 2$. Una base explícita es $\{(1,0,0,0),\ (0,-3,2,0)\}$. (Para $h \neq -3$ se tiene $\dim E_4 = 1$, con base $\{(1,0,0,0)\}$.)

3. Sea A invertible y λ un valor propio de A. Si $Av = \lambda v$ con $v \neq 0$, multiplicando por A^{-1} a izquierda se obtiene $v = \lambda A^{-1}v$, esto es, $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$. Luego, λ^{-1} es un valor propio de A^{-1} con el mismo vector propio v.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Sus valores propios son 1 y $\frac{1}{2}$. Tomemos vectores propios $v_1 = (-1,2)$ para $\lambda = 1$ y $v_2 = (-1,3)$ para $\lambda = \frac{1}{2}$. Como $\{v_1, v_2\}$ es base de $\mathbb{R}^2$, escribimos $(1,1) = \alpha v_1 + \beta v_2$. Resolviendo, $\alpha = -4,\ \beta = 3$. Entonces

$$A^k(1,1) = \alpha\, 1^k v_1 + \beta \left(\tfrac{1}{2}\right)^k v_2 = -4\, v_1 + 3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^k v_2.$$

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^k \to 0$, se concluye $\lim_{k\to\infty} A^k(1,1) = -4\, v_1 = (-4)(-1,2) = (4,-8)$.