Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2019

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Interrogación 2

1. Determine todos los valores de k para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ k & k & 5 \\ 2k & 2 & 7-2k+k^2 \end{pmatrix}$$

es invertible.

Solución.
Observe que A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$, para calcular el determinante escalonemos la matriz A.

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ k & k & 5 \\ 2k & 2 & 7-2k+k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ 0 & k-1 & 2 \\ 2k & 2 & 7-2k+k^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ 0 & k-1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-2k+k^2 \end{pmatrix}$$

al usar únicamente operaciones de tercer tipo tenemos que $|A| = (k-1)^3 k$ por lo tanto A es invertible si $k \neq 0$ y $k \neq 1$.

Puntaje:

- 1 pto por argumentar que si el determinante es distinto de cero la matriz es invertible o si argumenta que las columnas de A deben ser li.
- 2 ptos llegar a una correcta escalonada de A.
- 1 pto por calcular correctamente el determinante de A (si lo calcula por cofactores tiene los 3 ptos) o por argumentar que las columnas son LI si tiene tres pivotes no nulos.
- 1 pto por cada valor correcto de k (2 ptos total).

2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 12 & 5 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre una factorización PA=LU.

b) Usando lo anterior, resuelva el sistema

$$\begin{cases} x + 6y + 2z = 9 \\ 2x + 12y + 5z = -4 \\ -x - 3y - z = 17. \end{cases}$$

Solución.

a)

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Sean E_1, E_2 y P las matrices elementales que representan, en orden, a las operaciones elementales que transforman A en U. Así,

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

satisfacen que

$$PE_2E_1A = U$$

$$\Longrightarrow A = (E_1^{-1}E_2^{-1}P)U.$$

Además vemos que

$$E_1^{-1}E_2^{-1}P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$PA = P(E_1^{-1}E_2^{-1}P) = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} U = LU$$

con

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Resolver el sistema

$$Ax = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 17 \end{bmatrix}$$

es equivalente a resolver los sistemas

$$Ly = \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad Ux = y.$$

Del primer sistema obtenemos que

$$y = \begin{bmatrix} 9 \\ 26 \\ -22 \end{bmatrix}.$$

Luego, la solución de

$$Ux = \begin{bmatrix} 9 \\ 26 \\ -22 \end{bmatrix}$$

es

$$x = \begin{bmatrix} -43 \\ 16 \\ -22 \end{bmatrix}.$$

Puntaje:

- 1 pto por determinar correctamente U.
- 1 pto por determinar correctamente L.
- 1 pto por determinar correctamente P.
- 1 por argumentar que resolver el sistema es equivalente a resolver $Ly = \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad Ux = y.$
- 1 pto por determinar correctamente y.
- 1 pto por determinar correctamente x.

3. Sea $M_{2\times2}$ el espacio vectorial de todas las matrices de 2×2, y defina $T : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$ mediante $T(A) = A - A^T$.

   a) Determine una matriz A en $M_{2\times2}$ tal que $T(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

   b) Determine una base del espacio nulo (núcleo) de T.

Solución.

a)

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $b - c = 2,\ c - b = -2 \to b = 2 + c$ entonces una matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) El espacio nulo de T es

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b - c = 0 \right\}$$

tambien se podría definir como

$$\left\{ A \in M_{2\times2} \mid T(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ A \in M_{2\times2} \mid A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ A \in M_{2\times2} \mid A = A^T \right\}$$

y así

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera al espacio nulo de T y es un conjunto de vectores LI, por lo cual es una base para el espacio nulo de T.

Puntaje:

- 3 ptos por determinar una matriz A que cumpla lo pedido en a) (asignar puntaje completo si muestran la forma que debe tener esta matriz).
- 0.5 ptos por definir el espacio nulo de una transformación.
- 1.5 ptos por encontar las matrices que generan el espacio nulo de T.
- 1 pto por decir que estas matrices son LI (si lo son) y por lo tanto son una base del espacio nulo de T.

4. Demuestre que si A es una matriz tal que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $\det(A) = \det(A^2)$

Solución.

Del enunciado se deduce que A es de tamaño 3×3 y que sus columnas son L.D. puesto que con la combinación lineal no nula dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ se obtiene el vector cero.

Entonces $\det(A) = 0$.

Pero $\det(A^2) = (\det(A))^2 = 0^2 = 0$. Luego, se cumple la igualdad.

Puntaje:

- 2.5 ptos por argumentar de manera correcta que sus columnas son LD o que la matriz no es invertible.
- 2 .5 ptos por concluir que el $\det(A) = 0$.
- 1 pto por ocupar la propiedad que $\det(A^2) = (\det(A))^2$ y concluir lo pedido.

Continúa en la siguiente página.

5. Sea $P_2(\mathbb{R})$ los polinomios con grado menor o igual a 2 con coeficientes en los reales,

$$W = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid 2p(0) + p(1) = 0\}$$

y $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ 2p(0)+p(1) \end{pmatrix}$.

Determine una base para W y para $T(W) = \{T(p(x)) \mid p(x) \in W\}$.

Solución.

a) $W = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid 2p(0) + p(1) = 0\} = \{ax^2 + bx + c \mid 2(c) + (a + b + c) = 0\}$

$$= \left\{ax^2 + bx + c \mid a = -b - 3c\right\} = \left\{(-b - 3c)x^2 + bx + c\right\}$$

$$= \left\{b(-x^2 + x) + c(-3x^2 + 1)\right\} = Gen\left\{(-x^2 + x),\ (-3x^2 + 1)\right\}$$

Luego como $-x^2 + x$ no es múltiplo de $-3x^2 + 1$ el conjuto $\{(-x^2 + x),\ (-3x^2 + 1)\}$ es LI y genera a W, luego es una base de W.

b) $T(W) = \{T(p(x)) \mid p(x) \in W\} = \left\{ \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ 2p(0)+p(1) \end{pmatrix} \mid p(x) = b(-x^2 + x) + c(-3x^2 + 1) \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} c \\ -2c \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Luego $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $T(W)$.

Puntaje:

- 2 ptos por encontrar vectores que generen W.
- 1 pto por mostrar dos vectores LI que generen W y concluir que esta es la base. (descontar 0.4 ptos si no argumenta por qué son LI).
- 2 ptos por encontrar vectores que generen $T(W)$.
- 1 pto por mostrar un vector LI que genere W y concluir que ésta es la base.

6. Calcule la inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

utilizando la fórmula para la adjunta.
Solución.

Matriz de menores: $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 14 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Matriz de cofactores: $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 14 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Adjunta: $\begin{pmatrix} -9 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Determinante: -9.

Inversa: $-\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Puntaje:

- 2 ptos por encontrar la matriz de cofactores .(descontar 0.5 por cada cofactor mal calculado).
- 1 pto por encontrar la matriz adjunta. (si tuvo un error en la matriz de cofactores pero llego a la adjunta de esta asignar 0.5 ptos).
- 1 pto por encontrar el determinante de la matriz.
- 2 ptos por encontrar la inversa de la matriz.(descontar 0.7 por cada entrada mal calculada).

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b^2-3b \\ b^2-2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & b^2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, determine qué condiciones debe cumplir b para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Nul(A)$, con estas condiciones determine una base para el espacio columna de A.

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Nul(A) \leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b^2-3b \\ b^2-2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & b^2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2-3b+2 \\ b^2-1 \\ b^2-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $b^2-3b+2 = b^2-1 = b^2-1 = 0 \rightarrow b = 1$.

Así

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y una base para el espacio columna de A es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Puntaje:

- 1 pto por mostrar que condición debe cumplir un vector para estar en $Nul(A)$.(si muestra la forma de las soluciones del sistema homogéneo asociado a la matriz correctamente asignar este puntaje)
- 2 ptos por encontrar el valor de b.
- 3 ptos por encontrar una base para el espacio columna de A.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   a) Si A admite una descomposición $A = LDL^T$, donde $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ entonces el $\det(A) = -6$.

   b) Si A es una matriz 3×3 con $\det(A) = 5$ entonces $\det(2A) = 10$

   c) El volumen del paralelepípedo con vértice en el origen y vértices adyacentes en $(1, 4, 0), (-2, 5, 2)$ y $(-1, 2, -1)$ es 25

Solución.

a) La afirmación es verdadera.

$\det(A) = \det(L)\det(D)\det(L^T)$ como L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal el $\det(L) = 1 = \det(L^T)$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$ entonces el $\det(A) = -6$.

b) La afirmación es falsa.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que $\det(A) = 5$, y $2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $\det(2A) = 40 \neq 10$.
También se puede argumentar que si A es de $n \times n$ el $det(2A) = 2^n det(A)$.

c) La afirmación es verdadera.

Observe que el vólumen de dicho paralelepípedo está dado por el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -25$$

por lo tanto el volumen es 25.

Puntaje:

- 2 ptos por justificar correctamente a).
- 2 ptos por dar un contraejemplo en b), o mostrar la propiedad.
- 2 ptos por justificar correctamente c).