PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 29: Vectores propios y transformaciones lineales

1. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ y $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ las bases de los espacios vectoriales V y W, respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(\mathbf{b}_1) = 3\mathbf{d}_1 - 5\mathbf{d}_2\,, \quad T(\mathbf{b}_2) = -\mathbf{d}_1 + 6\mathbf{d}_2\,, \quad T(\mathbf{b}_3) = 4\mathbf{d}_2\,.$$

   Determine la matriz para T respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$.

2. Sean $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ las bases para los espacios vectoriales V y W, respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(\mathbf{d}_1) = 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2\,, \quad T(\mathbf{d}_2) = -2\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2\,.$$

   Determine la matriz para T respecto a $\mathcal{D}$ y $\mathcal{B}$.

3. Sean $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base estándar para $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base para un espacio vectorial V, y $T : \mathbb{R}^3 \to V$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_3 - x_2)\mathbf{b}_1 - (2x_2)\mathbf{b}_2 + (x_1 + 3x_3)\mathbf{b}_3\,.$$

   a) Calcule $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$ y $T(\mathbf{e}_3)$.

   b) Obtenga $\big[T(\mathbf{e}_1)\big]_{\mathcal{B}}$, $\big[T(\mathbf{e}_2)\big]_{\mathcal{B}}$ y $\big[T(\mathbf{e}_3)\big]_{\mathcal{B}}$.

   c) Determine la matriz para T respecto a $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$.

4. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base para un espacio vectorial V y $T : V \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 5x_3 \end{bmatrix}$$

   Encuentre la matriz para T respecto a $\mathcal{B}$ y la base estándar para $\mathbb{R}^2$.

5. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ la transformación que mapea un polinomio $\mathbf{p}(t)$ en el polinomio $(t + 3)\mathbf{p}(t)$.

   a) Encuentre la imagen de $\mathbf{p}(t) = 3 - 2t + t^2$.

   b) Demuestre que T es una transformación lineal.

c) Obtenga la matriz para T respecto a las bases $\{1, t, t^2\}$ y $\{1, t, t^2, t^3\}$.

6. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_4$ la transformación que mapea un polinomio $\mathbf{p}(t)$ en el polinomio $\mathbf{p}(t) + 2t^2\mathbf{p}(t)$.

   a) Determine la imagen de $\mathbf{p}(t) = 3 - 2t + t^2$.

   b) Demuestre que T es una transformación lineal.

   c) Encuentre la matriz para T respecto a las bases $\{1, t, t^2\}$ y $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$.

7. Suponga que el mapeo $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definido por

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = 3a_0 + (5a_0 - 2a_1)t + (4a_1 + a_2)t^2$$

   es lineal. Obtenga la representación matricial de T respecto a la base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

8. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base para un espacio vectorial V. Encuentre $T(4\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2)$ cuando T es una transformación lineal de V a V cuya matriz respecto a $\mathcal{B}$ es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Defina $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ por $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(-1) \\ \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix}$.

   a) Encuentre la imagen bajo T de $\mathbf{p}(t) = 5 + 3t$.

   b) Pruebe que T es una transformación lineal.

   c) Obtenga la matriz para T respecto a la base $\{1, t, t^2\}$ para $\mathbb{P}_2$ y la base estándar para $\mathbb{R}^3$.

10. Defina $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ por $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(-2) \\ \mathbf{p}(3) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(0) \end{bmatrix}$.

    a) Demuestre que Y es una transformación lineal.

    b) Encuentre la matriz para T respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$ para $\mathbf{P}_3$ y la base estándar para $\mathbb{R}^4$.

11. Determine la $\mathcal{B}$-matriz para la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ donde $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

    a) $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

12. Defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Determina una base $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^2$ con la propiedad de que $\left[T\right]_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

13. Sean $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ para $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a) Compruebe que $\mathbf{b}_1$ es un vector propio de A, pero que A no es diagonalizable.

b) Encuentre la $\mathcal{B}$-matriz para T.