PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Interrogación 1 MAT1203

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera demuéstrela. Si es falsa dé un contraejemplo.

1. *a)* Sean $u, v \in \mathbb{R}^4$. $\text{Gen}\{u, v\} = \text{Gen}\{2u, u + v\}$.

   Solución:

   Verdadero:

   $\text{Gen}\{u, v\} \subseteq \text{Gen}\{2u, u+v\}$ pues $u = \frac{1}{2}(2u)+0(u+v)$ y $v = -\frac{1}{2}(2u)+1(u+v)$.

   $\text{Gen}\{2u, u + v\} \subseteq \text{Gen}\{u, v\}$ pues $2u = 2(u) + 0(v)$ y $u + v = 1(u) + 1(v)$.

   b) Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$. Si $\|u\| = 1$, $\|v\| = 2$ y $u \cdot v = 1$, entonces $\|u + v\| = 2$.

   Solución:

   Falso:

   Basta tomar $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$:

   $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v = 1 + 2 + 2(1) = 7$, luego $\|u + v\| = \sqrt{7} \neq 1$.

2. *a*) La recta $L = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ está contenida en el plano de ecuación $3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$.

Solución:

Falso:

Basta tomar para $\alpha = 1$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in L$ y no pertenece al plano pues $6 + 2 - 8 \neq -1$.

b) Si $S = \{u, v, w\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^5$, entonces el conjunto $\{u + v, u + 2w\}$ es linealmente independiente.

Solución:

Verdadero:

Si $S = \{u, v, w\}$ es L.I. hay que demostrar que $\{u + v, u + 2w\}$ es L.I.

Sean α y β tales que $\alpha(u + v) + \beta(u + 2w) = \vec{0}$,

entonces $(\alpha + \beta)u + (\alpha)v + (2\beta)w = \vec{0}$.

Pero $\{u, v, w\}$ es L.I, entones $\alpha + \beta = \alpha = 2\beta = 0$.

Resolviendo se tiene $\alpha = \beta = 0$, luego $\{u + v, u + 2w\}$ es L.I.

3. *a*) Si A es una matriz tal que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

entonces A es sobreyectiva.

Solución:

Verdadero:

Sea $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Se tiene que $b = b_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b_1 - b_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Reemplazando se tiene:
$b = b_2 A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (b_1 - b_2)A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Luego $b = A\begin{pmatrix} b_1 \\ 2b_2 \\ 2b_1 - 2b_2 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto para todo $b \in \mathbb{R}^2$, existe $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $Ax = b$ y A es sobre.

b) Si A es una matriz cuya primera columna es nula, y se multiplica A por una matriz B, entonces AB tiene la primera columna nula.

Solución:

Falso:

Basta tomar $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. *a*) Si A es una matriz de 3×4, entonces A no puede ser inyectiva.

Solución:

Verdadero:

Si A es de 3×4, su rango máximo es 3, por lo tanto siempre habrá una columna en la F.E.R. de A que no tiene pivote. Por lo tanto las columnas de A son L.D. y no puede ser inyectiva.

b) Si A es una matriz de 4×2 y u un vector de $\mathbb{R}^2$, tales que la suma de las columnas de A es igual a Au, entonces $u - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Nul}(A)$.

Solución:

Verdadero:

Si la suma de columnas de A es Au, entonces $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Au$.

Entonces $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - Au = \vec{0}$.

Luego $A \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - u \right) = \vec{0}$ y $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - u \right) \in \text{Nul}(A)$.