PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Ayudantía 2 - MAT1203

1. Determine una ecuación general (normal) para el plano de ecuación vectorial

$$\left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} ; t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Queremos encontrar una ecuación normal para el plano dado por la ecuación vectorial

$$\left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

La ecuación vectorial nos dice que un punto genérico en el plano es de la forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + 2s + 2 \\ 2t + s + 1 \\ 3s + 3 \end{bmatrix}.$$

Descomponiendo en ecuaciones escalares obtenemos que

$$x = t + 2s + 2, \quad y = 2t + s + 1, \quad z = 3s + 3.$$

Despejando t de la primera ecuación tenemos que:

$$t = x - 2s - 2.$$

Al sustituir esto en la ecuación de y obtenemos que

$$y = 2(x - 2s - 2) + s + 1$$

luego,

$$y = 2x - 4s - 4 + s + 1 = 2x - 3s - 3.$$

Ahora, si despejamos el parámetro s de la ecuación de z, se tiene que

$$s = \frac{z - 3}{3}$$

por lo tanto

$$y = 2x - 3\left(\frac{z - 3}{3}\right) - 3$$

simplificando vemos que

$$y = 2x - (z - 3) - 3$$
$$y = 2x - z$$
$$2x - y - z = 0.$$

De lo anterior tenemos que una ecuación normal del plano es

$$2x - y - z = 0.$$

2. Considere las rectas $L_1 : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $L_2 : \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$

   (a) Determine la intersección entre L_1 y L_2.

   (b) Determine una ecuación general del plano que contiene a L_1 y L_2.

   Solución:

   (a) Para determinar la intersección entre las rectas dadas debemos encontrar $s, t \in \mathbb{R}$ tales que
   $$1 = -s,\ -1 + 3t = 2\,,\ 2 + t = -1 - 4s$$
   observe que las tres ecuaciones se satisfacen con $s = -1$ y $t = 1$, de esta manera el punto de intersección es $(1, 2, 3)$.

   b) Las dos ecuaciones de recta nos entregan los vectores directores y podemos escoger como vector posición el de cualquiera de las dos rectas. Usamos, por ejemplo, el de la recta L_1. Entonces la ecuación sería:
   $$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} s$$

3. Determine, usando argumentos geométricos, para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ se tiene que el sistema

$$\begin{cases} 2x + 4y &= -24 \\ x + ay &= b \end{cases}$$

   a) No tiene solución.

   b) Tiene solución única. Encuéntrela.

   c) Infinitas soluciones. Encuéntrelas.

Solución:
Primero, notemos que la relación entre los coeficientes que acompañan a **x** e **y** nos da información sobre la pendiente **m**. Por otro lado, la relación entre el coeficiente que acompaña a **x/y** y el término libre nos da información sobre el intersecto con el eje x o y respectivamente.

a) Para no tener solución, las rectas deben tener igual pendiente pero distinto coeficientes de posición. Recordemos que el coeficiente de posición es el intersecto con el eje y. Así;

$$\frac{4}{2} = \frac{a}{1} \implies a = 2$$
$$\frac{-24}{4} \neq \frac{b}{2} \implies b \neq -12$$

b) Para tener solución única, basta con tener pendientes distintas. Así:

$$a \neq 2$$

Para dicho caso, la intersección está dada por:

$$x = b - \frac{a(b+12)}{a-2}$$
$$y = \frac{b+12}{a-2}$$

c) Para tener infinitas soluciones, las rectas deben coincidir. Así:

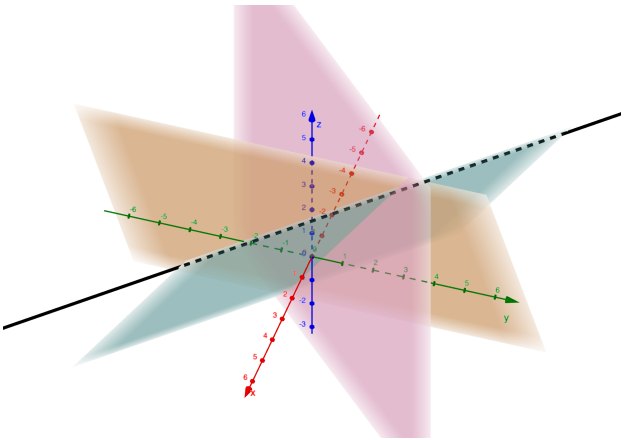
$$a = 2$$
$$b = -12$$

Y las soluciones corresponden a los siguientes puntos:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

4. La siguiente figura muestra tres planos que intersectan en la recta de ecuación

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$



Determine un sistema de 3×3 que describa está situación y que tenga como solución exactamente la recta descrita. De la ecuación de la recta del enunciado, podemos obtener algunas ecuaciones paramétricas.

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= -2 - t \\ z &= 3 \qquad (i) \end{aligned}$$

Luego, despejando t de entre las primeras 2 ecuaciones:

$$\begin{aligned} t &= x - 1 \\ t &= -(y + 2) \end{aligned}$$

Así;

$$x - 1 = -y - 2 \implies x + y + 1 = 0 \qquad (ii)$$

De tal forma, (i) y (ii) son 2 ecuaciones cuya solución es el sistema deseado. Sin embargo, queremos un sistema de 3x3. Así, es necesario introducir una nueva ecuación que sea redundante (no contenga información nueva). Por ejemplo:

$$x + y + z = 2 \qquad (iii)$$

De tal forma, el sistema de 3x3 con solución la recta deseada es:

$$\begin{aligned} (i) \qquad & z = 3 \\ (ii) \qquad & x + y + 1 = 0 \\ (iii) \qquad & x + y + z = 2 \end{aligned}$$