Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
TAV 2023

Álgebra Lineal - MAT1203
PAUTA Interrogación 3

1. (a) Encuentre el vector coordenado $[p(x)]_{\mathcal{B}}$ de $p(x) = 1+2x-x^2$ con respecto a la base $\mathcal{B} = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$.

   (b) Encuentre la matriz de cambio de base desde $\mathcal{B}$ hacia la base canónica.

Solución

(a) Se buscan escalares c_1, c_2 y c_3 tales que

$$c_1(1+x) + c_2\left(x+x^2\right) + c_3\left(1+x^2\right) = 1+2x-x^2$$

o, de manera equivalente,

$$(c_1+c_3) + (c_1+c_2)\,x + (c_2+c_3)\,x^2 = 1+2x-x^2$$

Esto significa que es necesario resolver el sistema

$$\begin{aligned} c_1 + \quad c_3 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= 2 \\ c_2 + c_3 &= -1 \end{aligned}$$

cuya solución es $c_1 = 2, c_2 = 0, c_3 = -1$. Por tanto,

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b) La matriz de cambio de base desde $\mathcal{B}$ hacia la base canónica $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ es

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} [1+x]_C & [x+x^2]_C & [1+x^2]_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Puntaje

- 1 punto por plantear una manera de encontrar c_1, c_2, c_3 (tanteo, sistema de ecuaciones)
- 1 punto por encontrar las constantes correctas.
- 1 punto por escribir el vector de coordenadas en $\mathbb{R}^3$.
- 1,5 puntos por establecer una manera de encontrar la matriz pedida.
- 0,5 puntos por determinar correctamente cada columna.

2. (a) Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determine si el conjunto $S = \{A \in M_{2\times 2} | AB = BA\}$ es un subespacio del espacio vectorial de matrices de orden 2×2.

   (b) Demuestre que si A es una matriz de $n \times m$, entonces

$$m + \text{Dim}\left(\text{Nul}\left(A^T\right)\right) = n + \text{Dim}(\text{Nul}(A)).$$

Solución

(a) Forma 1:

- Notamos que la matriz nula es una matriz de S ya que conmuta con B.
- Sean A_1, A_2 matrices de S. Notar que

$$(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B = BA_1 + BA_2 = B(A_1 + A_2)$$

  por lo que $A_1 + A_2 \in S$.
- Sea $A \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $(\alpha A)B = \alpha(AB) = \alpha(BA) = B(\alpha A)$. Por lo tanto, $\alpha A \in S$.

Por lo anterior, S es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

Forma 2:
Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz de S. Se tiene:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow c = 0, a = d$$

por lo tanto A se puede escribir de la forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Esto implica que

$$S = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Así, como S es un conjunto generado, entonces es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

(b) Del teorema del rango tenemos que

$$n = \dim \text{Nul}(A) + \text{rango de } A.$$

También podemos decir que

$$m = \dim \text{Nul}(A^T) + \text{rango de } A^T.$$

Como $\dim \text{Col}(A) = \dim \text{Col}(A^T)$ entonces rango de A = rango de A^T. Igualando las ecuaciones por dicha cantidad, tenemos que

$$n - \dim \text{Nul}(A) = m - \dim \text{Nul}(A^T)$$

lo que implica que

$$m + \dim \text{Nul}\left(A^T\right) = n + \dim \text{Nul}(A).$$

Puntaje

- (2a) Forma 1
  - 1 punto por mostrar que S tiene al vector nulo (o algún otro vector).
  - 1 puntos por determinar que S es cerrado para la operación de suma.
  - 1 puntos por determinar que S es cerrado para operación de multiplicación escalar.
- (2a) Forma 2
  - 2 punto por encontrar generadores de S.
  - 1 punto por concluir que S es un subespacio.
- (2b)
  - Asignar 3 puntos si la demostración es correcta.
  - Asignar 1,5 puntos si la demostración está incompleta o tiene pequeños erorres.
  - 0 puntos en otros casos.

3. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suponga que A es equivalente por filas a B. Encuentre bases de $\text{Nul}\, A, \text{Col}\, A$ y $\text{Fil}\, A$. Además determine las dimensiones de dichos espacios.

Solución La matriz B es una forma escalonada de A. Luego, las dos primeras columnas de A contienen posiciones pivotes, por lo que generan a las demás columnas. Por lo tanto, una base de $\text{Col}(A)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$ y $\dim \text{Col}(A) = 2$.

Por otro lado, $\text{Fil}(A) = \text{Fil}(B)$ por lo que una base de $\text{Fil}(A)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ y $\dim \text{Fil}(A) = 2$.

Por último, $\text{Nul}(A) = \text{Nul}(B)$. Un vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ en este espacio debe cumplir $x_1 + 6x_3 + 5x_4 = 0$ y $2x^2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$ por lo que se puede escribir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x_3 - 5x_4 \\ -\frac{5}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De esta forma una base de $\text{Nul}(A)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\dim \text{Nul}(A)$=2.

Puntaje

- 1 punto por determinar una base de $\text{Col}(A)$
- 1 punto por determinar $\dim \text{Col}(A)$.
- 2 puntos por determinar $\dim \text{Fil}(A)$ (no es necesario encontrar la base).
- 1 punto por determinar una base de $\text{Nul}(A)$
- 1 punto por determinar $\dim \text{Nul}(A)$.

4. Determine los valores propios y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Además indique multiplicidades algebraicas y geométricas.

Solución La ecuación característica es

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & -\lambda & -3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda \left(\lambda^2 + 2\lambda\right) = -\lambda^2(\lambda + 2)$$

Por tanto, los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = -2$. En consecuencia, el valor propio 0 tiene multiplicidad algebraica 2 y el valor propio -2 tiene multiplicidad algebraica 1 . Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, se calcula

$$[A - 0I \mid 0] = [A \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

de donde se tiene que un vector propio $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ en W_0 satisface $x_1 = x_3$. Por ende, tanto x_2 como x_3 son libres. Al hacer $x_2 = s$ y $x_3 = t$, se tiene

$$W_0 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ s \\ t \end{bmatrix} \right\} = \left\{ s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Para $\lambda_3 = -2$,

$$[A - (-2)I \mid 0] = [A + 2I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

de modo que $x_3 = t$ es libre y $x_1 = -x_3 = -t$ y $x_2 = 3$ y $x_3 = 3t$. En consecuencia,

$$W_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ posee multiplicidad geométrica 2 y $\lambda_3 = -2$ tiene multiplicidad geométrica 1.

puntaje

- 2 puntos por determinar los valores propios correctos.
- 2 puntos por encontrar los espacios propios correspondientes, o al menos, una base de dichos espacios.
- 2 puntos por indicar correctamente todas las multiplicidades requeridas.