PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2020

INTERROGACIÓN 2
MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

1. Encuentre una factorización $A = LU$ de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Mediante operaciones elementales llevamos la matriz A a una forma escalonada:

$$A \sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ -8 & 13 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 19 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Definimos

$$U = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Las matrices elementales correspondientes a las operaciones elementales, en el orden que se aplicaron a A, son:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$E_3 E_2 E_1 A = U.$$

$$\Longrightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} U$$

$$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} U.$$

Definimos

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

y obtenemos $A = LU$.

PUNTAJE:

- **3 puntos** por la matriz U.
- **3 puntos** por la matrix L.
- Descontar **1 punto** por cada coordenada incorrecta.

2. Sean A, B, C matrices 3×3 tales que $\det(A) = -2$, $\det(B) = 3$. Encuentre $\det(C)$, si

$$\det\left(B^2\left(\frac{1}{2}A^3\right)^{-1}\left(C^3\right)^T\right) = \frac{9}{8}.$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}
\det\left(B^2\left(\frac{1}{2}A^3\right)^{-1}\left(C^3\right)^T\right) &= \det\left(B^2\right)\det\left(\left(\frac{1}{2}A^3\right)^{-1}\right)\det((C^3)^T) \\
&= (\det(B))^2 \det\left(\frac{1}{2}A^3\right)^{-1}\det(C^3) \\
&= (\det(B))^2(2)^3\frac{1}{\det(A)^3}\det(C)^3 \\
&= \frac{3^2\cdot 2^3\det(C)^3}{(-2)^3} \\
&= -9\det(C)^3
\end{aligned}$$

Así,

$$-9\det(C)^3 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \det(C) = \frac{-1}{2}.$$

PUNTAJE:

- **6 puntos** por llegar al valor correcto
- Descontar **1 punto** por cada error de cálculo.

3. Suponga que $a \neq b$ y $a \neq -b$. Encuentre la inversa de $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$ usando la matriz adjunta.

SOLUCIÓN:

Calculamos los cofactores de la matriz A:

$$C_{11} = a, C_{12} = 0, C_{13} = -b$$
$$C_{21} = 0, C_{22} = a^2 - b^2, C_{23} = 0$$
$$C_{31} = -b, C_{32} = 0, C_{33} = a$$

La matriz adjunta corresponde a

$$Adj(A) = (C_{ij})^T = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de A a través de la segunda columna:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2.$$

Ya que $a^2 \neq b^2$, la matriz es invertible. Más aún,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2-b^2} & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} \end{pmatrix}.$$

PUNTAJE:

- **2 puntos** por calcular correctamente la matriz adjunta.
- **2 puntos** por calcular el determinante de A.
- **2 puntos** por encontrar A^{-1}.
- Si encontró la inversa con otro método, califique con **0 puntos**.

4. Sea S el paralelogramo determinado por los vectores $b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y sea $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule el área de la imagen de S por el mapeo $x \to Ax$.

SOLUCIÓN:

Sea R la imagen del paralelógramo S por la función $x \to Ax$. Se cumple que

$$\text{Área de } R = |\det(A)| \cdot (\text{Área de } S) \tag{1}$$

Como

$$|\det(A)| = \left| \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right| = 12 - (6) = 6$$

y por otro lado

$$\text{Área de } S = |\det(b_1 \quad b_2)| = \left| \det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right| = |-10 - (-6)| = 4$$

entonces

$$\text{Área de } R = 6 \cdot 4 = 24.$$

PUNTAJE:

- **2 punto** por enunciar la fórmula 1.
- **1,5 puntos** por calcular el área de S.
- **1,5 puntos** por calcular $|\det(A)|$.
- **1 punto** por obtener el área de R.

5. Sean $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales. Considere el conjunto

$$U = \{p \in \mathbb{P}_2 : p'(1) = p(0)\}.$$

Encuentre una base de U.

SOLUCIÓN:

Sea $p \in \mathbb{P}_2$. Se tiene que $p(x) = ax^2 + bx + c$ y $p'(x) = 2ax + b$, para algunas constantes a, b, c. Más aún,

$$p \in U \Leftrightarrow 2a + b = c$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^2 + bx + 2a + b, \quad a, b \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow p(x) &= a(x^2 + 2) + b(x + 1) \\ \Leftrightarrow U &= Gen\{x^2 + 2, x + 1\} \end{aligned}$$

Es decir, los polinomios $x^2 + 2$ y $x + 1$ son generadores del conjunto U. Más aún, como tienen grado distinto, son linealmente independientes. Por lo tanto $\{x^2 + 2, x + 1\}$ es una base de U.

PUNTAJE:

- **4 puntos** por encontrar generadores
- **2 puntos** por concluir que es base comprobando la independencia lineal.

6. Determine si w está en el espacio columna de A, en el espacio nulo de A, o en ambos, donde

$$w = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 10 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN:

Para comprobar si $w \in Nul(A)$, calculamos la multiplicación Aw:

$$Aw = \begin{bmatrix} 10 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto w es un vector del núcleo de A. Por otro lado, observamos que w es el vector opuesto a la cuarta columna de la matriz A. Por lo tanto, w si pertenece a $Col(A)$.

PUNTAJE:

- **3 puntos** por concluir que w está en el núcleo de A.
- **3 puntos** por concluir que w está en el espacio columna.

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por:

$$\begin{gathered} T(e_1) = 2e_1 + 3e_2 - e_4 \\ T(e_2) = -e_1 - 2e_2 - 2e_3 \\ T(e_3) = e_2 + 4e_3 + e_4 \end{gathered}$$

a) Encuentre $T(x, y, z)$.

b) Encuentre una base para el núcleo de T.

SOLUCIÓN:

a) La matriz estándar de la transformación T es:

$$[T] = [T(e_1) \quad T(e_2) \quad T(e_3)] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3x - 2y + z \\ -2y + 4z \\ -x + z \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in Nul(T) \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3x - 2y + z \\ -2y + 4z \\ -x + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de $Nul(T)$.

PUNTAJE:

- **3 puntos** por encontrar la fórmula de $T(x, y, z)$.
- **3 puntos** por encontrar una base del núcleo de T.

8. El siguiente conjunto de polinomios

$$\mathcal{B} = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2\}$$

es una base de $\mathbb{P}_2$.
Encuentre el vector de coordenadas de $p(t) = 1 + 4t + 7t^2$ respecto de $\mathcal{B}$.

SOLUCIÓN:

La matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ es:

$$P = \begin{bmatrix} [1 + t^2]_{\mathcal{C}} & [t + t^2]_{\mathcal{C}} & [1 + 2t + t^2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$P \left[1 + 4t + 4t^2\right]_{\mathcal{B}} = \left[1 + 4t + 7t^2\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\Longrightarrow \left[1 + 4t + 4t^2\right]_{\mathcal{B}} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Calculando la inversa de P se obtiene:

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

En conclusión:

$$\left[1 + 4t + 4t^2\right]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

PUNTAJE:

- **2 puntos** por determinar la matriz P o al menos obtener sus columnas por separado.
- **2 puntos** por escribir la ecuación 2, o la ecuación 3, o alguna similar que relacione el vector buscado con las columnas de P.
- **2 puntos** por determinar el vector coordenadas pedido.