Apuntes de Álgebra Lineal

Carolina B. Becerra O.

Agosto 2010

Capítulo 1

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1. El conjunto de n tuplas ordenadas de números reales se denota por $\mathbb{R}^n$ y a sus elementos se les llama vectores.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ tal que } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

A $x_1, \ldots, x_n$ se les llama componentes o coordenadas del vector v. Al vector cuyas componentes son todas 0 se le llama vector nulo y se denota por $\overrightarrow{0}$.

Definición 1.2. Vectores canónicos:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i \ , \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

Definición 1.3. Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ la suma de u y v, denotada por $u + v$ es el vector cuyas componentes son la suma de las respectivas componentes de u y v. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, la ponderación de u por el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ es el vector cuyas componentes son el producto de α por las respectivas componentes de u. Es decir:

Si $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, entonces $u + v = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$, $\alpha u = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$.

Proposición 1.4. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces las operaciones anteriores satisfacen:

- $u + v \in \mathbb{R}^n$.
- $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- $u + v = v + u$.
- $u + \overrightarrow{0} = u$.
- $u + (-u) = \overrightarrow{0}$.
- $\alpha u \in \mathbb{R}^n$.
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.
- $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.
- $1\ u = u$.

Observación 1.5. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha u = \vec{0}$, entonces $\alpha = 0$ o $u = \vec{0}$.

Definición 1.6. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, el producto punto de u y v, denotado por $u \cdot v$, es la suma de los respectivos productos entre coordenadas. Es decir

$$\text{Si } u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ entonces } u \cdot v = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Proposición 1.7. Sea $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces el producto punto satisface:

- $u \cdot v \in \mathbb{R}$.
- $u \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- $u \cdot v = v \cdot u$.
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.
- $\alpha(u \cdot v) = (\alpha u) \cdot v$.

- $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0 \leftrightarrow u = \vec{0}$.

Ejemplo 1.8. $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Definición 1.9. Norma de un vector: Dado $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} = \sqrt{u \cdot u}$.

Definición 1.10. Vector unitario: vector que tiene norma 1.

Definición 1.11. Distancia entre vectores: $d(u, v) = \|u - v\|$.

Ejemplo 1.12. $\|e_i\| = 1$ para todo $i = 1 \ldots n$.

$d(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ \sqrt{2} & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Proposición 1.13. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathbb{R}^n$. Entonces

- $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.
- $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v$.
- $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$.
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Definición 1.14. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. El ángulo θ entre dos vectores es tal que: $\cos(\theta) = \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$.

Ejemplo 1.15. $\theta(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ \pi/2 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Definición 1.16. Sean $u \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$. El hiperplano definido por u y b es $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = b\}$. Si $b = 0$, se dice que pasa por el origen.

Definición 1.17. Sea $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Una combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_m$ es el vector

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m,$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, para algunos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Definición 1.18. Sea $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Una combinación lineal convexa de los vectores $v_1, \ldots, v_m$ es $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$, tal que α_i son reales no negativos y $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

Definición 1.19. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. El conjunto generado por S, denotado por $< S >$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S.

Ejemplo 1.20. $< e_1, \ldots e_n >= \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.21. Recta en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.22. Recta en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1.23. Recta en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.24. Plano en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1.25. En $\mathbb{R}^4$ sea $H = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$ tal que $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

$$x \in H \leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \end{bmatrix} \text{ para } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

$$x \in H \leftrightarrow x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ para } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Por lo tanto } H =< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} >.$$

Ejemplo 1.26. Combinaciones convexas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Proposición 1.27. Sean $S, S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

- $< \phi >=< \overrightarrow{0} >= \{\overrightarrow{0}\}$.
- $\overrightarrow{0} \in < S >$.
- $< S >$ es cerrado bajo la suma y multiplicación por escalar.
- $S \subset < S >$.
- $S_1 \subset S_2 \rightarrow < S_1 > \subset < S_2 >$.
- $S_1 \subset < S_2 > \rightarrow < S_1 > \subset < S_2 >$.
- $< S >=<< S >>$.

Teorema 1.28. Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
Si v_1 es combinación lineal de $v_2, \ldots, v_m$, entonces

$$< v_1, v_2, \ldots, v_m >=< v_2, \ldots, v_m >$$

Definición 1.29. Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- S es **linealmente dependiente** (LD) si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ no todos nulos tal que $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}$. (se puede construir al vector cero de manera no trivial).
- S es **linealmente independiente** (LI) si no es LD, es decir si para cualquier combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}$, se tiene necesariamente que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. (la única manera de construir al vector cero es la trivial).

Observación 1.30. Si $\vec{0} \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces S es LD.

Proposición 1.31. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

- S es LD si y sólo si existe un vector de S que es combinación lineal del resto de los vectores de S.
- S es LI si y sólo si todo subconjunto de S es LI.

Observación 1.32. Problema importante: Dado un conjunto S y un vector b en $\mathbb{R}^n$. ¿$b \in < S >$?.

1.1. Problemas

1. Sea $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Determine si existen a, b, c tal que $\overrightarrow{0} = av_1 + bv_2 + cv_3$.

2. Sean $v_1 = u_1 + 3u_2$ y $v_2 = -u_1 + u_2$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que existen escalares a, b, c, d tal que $u_1 = av_1 + bv_2$ y $u_2 = cv_1 + dv_2$.

3. Determine el vector u tal que la ecuación de los siguientes hiperplanos sea $x \cdot u = 0$. Escríbalos como conjuntos generados.

   a) $x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 = 0$ en $\mathbb{R}^4$.
   b) $x_1 + x_3 - x_4 = 0$ en $\mathbb{R}^4$.
   c) $2x_1 + 2x_2 - 2x_5 = 0$ en $\mathbb{R}^5$.
   d) $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ en $\mathbb{R}^5$.

4. Explique la diferencia entre $\{v_1, v_2\}$ y $< v_1, v_2 >$.

5. Sean $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ tal que $u_3 = 2u_1 - 5u_2 + u_4$. Demuestre que

   a) $u_1 \in < u_2, u_3, u_4 >$.
   b) $< u_1, u_2, u_3, u_4 > = < u_1, u_2, u_3 > = < u_1, u_2, u_4 > = < u_1, u_3, u_4 > = < u_2, u_3, u_4 >$

6. Sea $S = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto L.I. Demuestre que el conjunto $\{u_1 - 2u_2, u_2 + 2u_3\}$ es un conjunto L.I.

7. Sea $S = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto L.D. Demuestre que al menos uno de los vectores de S es combinación lineal de los otros dos.

8. Demuestre que $<< v_1, v_2 >> = < v_1, v_2 >$.

9. Demuestre que si $S_1 \subset S_2$, entonces $< S_1 > \subset < S_2 >$.

10. Demuestre que si $S_1 \subset < S_2 >$, entonces $< S_1 > \subset < S_2 >$.

Capítulo 2

Sistema de ecuaciones

Definición 2.1. Una matriz es un arreglo ordenado de m vectores de $\mathbb{R}^n$. Notación: $A = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_m]$. Se dice que A es una matriz de $n \times m$, donde m es el número de columnas y n es el número de filas.
Si $v_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$ para $j = 1, \ldots, m$, entonces $A = (a_{i,j})$, donde $a_{i,j}$ son los coeficientes o entradas de la matriz.

Definición 2.2. Matriz nula es tal que todos sus coeficientes son 0.

Definición 2.3. Matriz cuadrada es tal que $n = m$.

Definición 2.4. Matriz identidad es una matriz cuadrada denotada por I tal que $I = [e_1\ \ldots\ e_n]$.

Definición 2.5. Dada $A = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_m]$ de $n \times m$ y $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$, el producto de A por x es $Ax = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_mv_m\ \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 2.6. Sea A de $n \times m$, $x, y \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

- $A(x + y) = Ax + Ay$.
- $A(\alpha x) = \alpha Ax$.
- $A\vec{0} = \vec{0}$.

Definición 2.7. Un sistema de ecuaciones $Ax = b$ es tal que A es una matriz de $n \times m$ asociada al sistema, $b \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^m$. $[A\ b]$ es la matriz ampliada del sistema.
El sistema es homogéneo si $b = \overrightarrow{0}$ y no homogéneo si $b \neq \overrightarrow{0}$. El sistema es consistente si tiene solución e inconsistente si no tiene solución.

Definición 2.8. Una matriz se dice que está en la forma escalonada (F.E.) si:

1. $a_{1,1} \neq 0$.
2. Si el pivote de la fila i está en la columna j, entonces el pivote de la fila $i+1$ está en la columna k, tal que $j < k$. (Pivote: primer elemento distinto de 0 de la fila).
3. Las filas nulas están al final de la matriz.

Definición 2.9. Una matriz se dice que está en la forma escalonada reducida (F.E.R.) si:

1. Está es la F.E.
2. Todos los pivotes son iguales a 1.
3. Los vectores columna que contienen pivotes son canónicos.

Definición 2.10. Dada una matriz, las operaciones fila son:

1. Tipo I: Intercambiar dos filas: $F_i \leftrightarrow F_j$.
2. Tipo II: Multiplicar una fila por un escalar no nulo: $F_i \rightarrow \lambda F_i$.
3. Tipo III: (pivotear) Sumar a una fila, un múltiplo escalar de otra: $F_i \rightarrow F_i + \lambda F_j$.

Observación 2.11. Para solucionar un sistema de ecuaciones se lleva la matriz ampliada a su F.E. o a su F.E.R., usando operaciones fila, luego se reinterpreta el sistema y se resuelve recursivamente hacia arriba. Si el sistema es consistente, a las variables que quedan en posiciones no pivotes se les llama variables libres.

Teorema 2.12. Sea el sistema de ecuaciones $Ax = b$ con A de $n \times m$, y M la F.E.R. de la matriz $M = [A\ b]$.

Para $b \neq \vec{0}$, el sistema

- es inconsistente si y sólo si M tiene una fila de la forma $[0 \dots 0\ c]$ con $c \neq 0$,
- es consistente y tiene solución única si y sólo si M tiene m pivotes,
- es consistente y tiene infinitas soluciones si y sólo si M tiene menos de m pivotes (hay variables libres).

Para $b = \overrightarrow{0}$ el sistema es consistente ($\overrightarrow{0}$ es solución) y

- tiene solución única si y sólo si F.E. de A tiene m pivotes,
- tiene infinitas soluciones si y sólo si F.E. de A tiene menos de m pivotes (hay variables libres).

Teorema 2.13. Sea el sistema $Ax = b$, u tal que $Au = b$ y los conjuntos $C_1 = \{x : Ax = b\}$ y $C_2 = \{y : Ay = \vec{0}\}$. Entonces $x \in C_1$ si y sólo si $x - u \in C_2$.

Proposición 2.14. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y $A = [v_1 \dots v_m]$. S es L.I. si y sólo si el sistema $Ax = \vec{0}$ tiene solución única.

Observación 2.15. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y A una matriz cuyas filas son los vectores del conjunto S. S es L.I. si y sólo si la F.E. de la matriz A no tiene filas nulas.

Teorema 2.16. Sea $v_1, \dots, v_m$ un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. Si $m > n$, entonces $v_1, \dots, v_m$ es L.D.

Observación 2.17. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$, $A = [v_1 \dots v_m]$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces $b \in < v_1, \dots, v_m >$ si y sólo si el sistema $Ax = b$ es consistente.

Observación 2.18. Sea A de $n \times m$ y $b_1, \dots b_r \in \mathbb{R}^n$, para resolver $Ax = b_1, Ax = b_2, \dots, Ax = b_r$ se escalona una única matriz $[A\ b_1\ b_2 \dots b_r]$ y se interpreta la solución para cada sistema por separado.

Observación 2.19. Para buscar la intersección de n hiperplanos, se resuelve el sistema asociado a las n ecuaciones.

2.1. Problemas

1. Sea $A = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$ una matriz de 3×4. Determine $A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ suponiendo que $v_1 + v_3 = v_2$ y $v_1 + v_4 = v_3$

2. Encuentre la forma escalonada reducida de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

3. Determine la solución general del sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2. \end{aligned}$$

4. Determine condiciones sobre a para que el siguiente sistema no tenga solución

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + ax_3 &= 1. \end{aligned}$$

5. Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^7$ y $M = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$. Si $M(2e_1 - e_3 + e_4) = \vec{0}$, ¿cuál es el mínimo de filas nulas que tiene la F.E.R. de M? Justifique.

6. Determine la solución general de los siguientes sistemas:

   a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 &= 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 5x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

7. Resuelva los siguientes sistemas:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 11 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 &= 1 \\ -x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

8. Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde a es una constante.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ ax_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ x_1 - ax_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

   a) Determine valores de a para los cuales el sistema es inconsistente.

   b) Determine valores de a para los cuales el sistema es consistente, y encuentre la solución.

9. Determine condiciones sobre los números primos p y q tal que el sistema

$$\begin{aligned} px_1 + qx_3 &= q + 1/q \\ px_2 + qx_4 &= q + 1/q \\ qx_1 + px_3 &= p + 1/p \\ qx_2 + px_4 &= p + 1/p \end{aligned}$$

   - No tenga soluciones.
   - Tenga infinitas soluciones, y encuentre el conjunto solución.
   - Tenga una única solución, y encuentre la solución.

10. Determine un sistema de ecuaciones $Ax = \overrightarrow{0}$ tal que su conjunto solución sea: $< \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} >$

11. Determine un sistema de ecuaciones $Ax = b$ tal que su conjunto solución sea: $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + < \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} >$

12. Sea $a \in \mathbb{R}$. Estudie la consistencia del siguiente sistema. En los casos en que exista solución, encuéntrelas.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= a \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & a & 3 \\ 0 & -1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a-3 & 6 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto si $a = 3$, el sitema no tiene solución.

Si $a \neq 3$, entonces

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & a(5-a) \end{bmatrix}$$

Luego, si $a \neq 0$ y $a \neq 5$ el sistema no tiene solución.

Si $a = 0$ la solución es única: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -2$.

Si $a = 5$ la solución es única: $x_1 = 9$, $x_2 = -4$ y $x_3 = 3$.

13. Demuestre que si un sistema de ecuaciones tiene dos soluciones distintas, entonces tiene una cantidad infinita de soluciones.

Solución:

Sea u y v vectores distintos tales que solucionan el sistema $Ax = b$.

Entonces basta tomar cualquier vector de la forma: $x = u + \alpha(u - v)$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y se tiene que:

$Ax = A(u + \alpha(u - v)) = Au + \alpha(Au - Av) = b + \alpha(b - b) = b.$

14. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ y $Ax = b$ un sistema de ecuaciones tal que la forma escalonada reducida de $[A \mid b]$ es la matriz,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \end{array}\right]$$

Determine si existen valores de p y de q para que:

$a)$ el sistema no tenga solución,

$b)$ el sistema tenga solución única y en tal caso encuéntrela,

$c)$ el sistema tenga infinitas soluciones y en tal caso encuéntrelas,

$d)$ $b \in C(A)$,

$e)$ columnas de A sean L.I.,

$f)$ filas de A sean L.I.

Capítulo 3

Matrices

Definición 3.1. Sea A una matriz de $n \times m$, se define una función $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, dada por

$$T_A(x) = Ax$$

Ejemplo 3.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces $T_A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \end{bmatrix}$.

Observación 3.3. El dominio de esta función es $\mathbb{R}^m$. La imagen de $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ es $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 3.4. Sea A una matriz de $n \times m$, la función T_A se dice que es lineal pues para $x, y \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

- $T_A(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T_A(x) + T_A(y)$,
- $T_A(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha T_A(x)$.

Observación 3.5. En adelante la función T_A se denotará por A.

Definición 3.6. $M_{n,m}(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices de $n \times m$ con coeficientes reales.

Definición 3.7. Sean $A = [v_1 \ \dots \ v_m], B = [u_1 \ \dots \ u_m] \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. La operaciones suma y multiplicación por escalar de matrices se definen por $A + B = [v_1 + u_1 \ \dots \ v_m + u_m]$, $\alpha A = [\alpha v_1 \ \dots \ \alpha v_m]$.

Observación 3.8. $-1 \cdot A = -A$.

Proposición 3.9. Sean $A, B, C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

- $A + B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- $A + B = B + A$.
- $A + 0 = A$.
- $A + (-A) = 0$.
- $\alpha A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
- $1\ A = A$.

Definición 3.10. Sea A de $n \times m$ y B de $m \times p$, tal que $B = [u_1\ \dots\ u_p]$, el producto de A por B es la matriz $A \cdot B = [A \cdot u_1\ \dots\ A \cdot u_p]$ de $n \times p$.

Proposición 3.11. Sean A, B, C matrices tal que las siguientes operaciones están bien definidas y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

- $A(BC) = (AB)C$.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $IA = AI = A$.
- $0A = A0 = 0$.

Observación 3.12. En general el producto de matrices no es conmutativo.
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = BA$.

Definición 3.13. Sea A de $n \times m$, la trasnpuesta de A denotada por A^t es de $m \times n$ y es la matriz que resulta de intercambiar las filas de A por las columnas de la A.

Ejemplo 3.14. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, entonces $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Proposición 3.15. Sean A, B matrices tal que las siguientes operaciones están bien definidas y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

- $(A^t)^t = A$.
- $\alpha(A^t) = (\alpha A)^t$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(AB)^t = B^t A^t$.

Definición 3.16. Sea $A = (a_{i,j})$ de $n \times n$.

- A es triangular superior si $a_{i,j} = 0$ para todo $i > j$.
- A es triangular inferior si $a_{i,j} = 0$ para todo $i < j$.
- A es diagonal si $a_{i,j} = 0$ para todo $i \neq j$.
- A es simétrica si $A = A^t$.
- A es antisimétrica si $A = -A^t$.

Definición 3.17. Sea A de $n \times m$.

- $\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = \overrightarrow{0}\}$. Es el conjunto de pre-imágenes del vector cero. Es el conjunto solución del sistema homogéneo asociado a la matriz A. Es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$.
- $\text{Im}(A) = \{b \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^m : Ax = b\}$. Es el recorrido de la función dada por la matriz A. Es el conjunto de todos los vectores b tal que el sistema $Ax = b$ es consitente. Es el conjunto generado por las columnas de la matriz A. Es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

- $C(A)$ es el conjunto generado por las columnas de la matriz A. Es el recorrido de la función dada por la matriz A. Es el conjunto de todos los vectores b tal que el sistema $Ax = b$ es consitente. Es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.
- $F(A)$ es el conjunto generado por las filas de la matriz A. Es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$.

Observación 3.18. $\text{Im}(A) = C(A) = F(A^t)$.

Teorema 3.19. Sea A de $n \times m$. Entonces

- A es 1-1 (inyectiva) si y sólo si $\text{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.
- A es sobreyectiva si y sólo si $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.

Definición 3.20. El rango de una matriz es el número de pivotes que tiene la F.E.R. de la matriz.

Teorema 3.21. Sea A de $n \times m$. Entonces

Filas de A son L.D.
$\leftrightarrow$ Existe una fila que es combinación lineal del resto.
$\leftrightarrow$ $f_n = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_{n-1} f_{n-1}$ (sin perder generalidad)
$\leftrightarrow$ La FER de A tiene por lo menos una fila nula (haciendo las operaciones del tipo III necesarias).

Filas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ La F.E.R. de A tiene no tiene filas nulas.
$\leftrightarrow$ Todas las filas de la F.E.R. de A contienen pivotes.
$\leftrightarrow$ Rango de A es n.

Columnas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ En la F.E.R. de A todas las columnas son pivotes.
$\leftrightarrow$ Rango de A es m.

A es 1-1
$\leftrightarrow$ $\text{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.
$\leftrightarrow$ $Ax = \overrightarrow{0}$ tiene solución única.
$\leftrightarrow$ Columnas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ Rango de A es m.

A es sobre
$\leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.
$\leftrightarrow$ $Ax = b$ es consistente para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
$\leftrightarrow$ $Ax = e_i$ es consistente para todo vector canónico.
$\leftrightarrow$ La FER de $[A\ e_1\ \ldots e_n]$ no tiene filas de la forma $[0 \ldots 0\ u]$ con u un vector no nulo.
$\leftrightarrow$ Filas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ Rango de A es n.

Definición 3.22. A de $n \times m$ tiene inversa por la derecha si existe una matriz B de $m \times n$ tal que $AB = I$.

Teorema 3.23. Sea A una matriz de $n \times m$. Entonces

A tiene inversa por la derecha.
$\leftrightarrow$ Existe B tal que $AB = I$.
$\leftrightarrow$ Existen $u_1, \ldots, u_n$ tal que $A[u_1 \ldots u_n] = [e_1 \ldots e_n]$.
$\leftrightarrow$ $Ax = e_i$ es consistente para todo vector canónico.
$\leftrightarrow$ A es sobre.
$\leftrightarrow$ Filas de A son L.I.
$\leftrightarrow$ Rango de A es n.

Observación 3.24. Para encontrar la inversa por la derecha de una matriz, hay que escalonar la matriz $[AI]$ y resolviendo cada sistema se obtienen las columnas de la matriz B.

Observación 3.25. Una matriz no cuadrada no puede tener inversa por la izquierda y derecha al mismo tiempo. Lo que no significa que siempre tenga al menos una inversa, por ejemplo la siguiente matriz no tiene inversa por la derecha ni por la izquierda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición 3.26. A de $n \times n$ es invertible o no singular si existe una matriz B de $n \times n$ tal que $AB = I$.

Observación 3.27. Sea A de $n \times n$. Si A tiene inversa por la derecha, entonces su rango es n, luego tiene inversa por la izquierda y es la misma que por la derecha. Además es única. La notación para la inversa de A es A^{-1}.

Proposición 3.28. Sean A y B de $n \times n$. Entonces

- A es invertible si y sólo si $Ax = b$ tiene solución única para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
- Si A es invertible, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A es invertible si y sólo si A^t es invertible. En este caso $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- Si A es invertible y $\alpha \neq 0$, entonces αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$.
- Si A es invertible, entonces para todo $r \in \mathbb{N}$, A^r es invertible y se tiene $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r = A^{-r}$.
- Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Observación 3.29. Sean $A_1, \ldots, A_k$ matrices cuadradas e invertibles. Entonces $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = (A_k)^{-1} \cdot \ldots \cdot (A_1)^{-1}$.

Proposición 3.30. Sean A, B, C, D matrices tal que las siguientes operaciones están bien definidas. Entonces

- Si A es invertible y $AB = AC$, entonces $B = C$.
- Si A es invertible y $BA = CA$, entonces $B = C$.
- Si A es invertible y $AB = BA$, entonces $BA^{-1} = A^{-1}B$.
- Si A es invertible, puede ocurrir que $A^{-1}BA \neq B$.
- Si A y B son invertibles, y $ACB = D$, entonces $C = A^{-1}DB^{-1}$.

Observación 3.31. Una matriz diagonal es invertible si y sólo si todos los elementos de su diagonal son no nulos.

Observación 3.32. Una matriz triangular superior (o inferior) es invertible si y sólo si todos los elementos de su diagonal son no nulos.

Definición 3.33. E_I (E_{II}, E_{III}) es una matriz elemental del tipo I (II, III), si es la matriz que resulta de hacer una operación elemental del tipo I (II, III) a la matriz identidad. Se dice que la matriz E representa dicha operación elemental.

Observación 3.34.

tipo	matriz	operación	transpuesta	operación	inversa	operación
I	E_I	$F_i \leftrightarrow F_j$	E_I	$F_i \leftrightarrow F_j$	E_I	$F_i \leftrightarrow F_j$
II	E_{II}	$F_i \to \lambda F_i$	E_{II}	$F_i \to \lambda F_i$	$\widetilde{E_{II}}$	$F_i \to 1/\lambda F_i$
III	E_{III}	$F_i \to F_i + \alpha F_j$	$\widetilde{E_{III}}$	$F_j \to F_j + \alpha F_i$	$\widetilde{\widetilde{E_{III}}}$	$F_i \to F_i - \alpha F_j$

Observación 3.35. Si A es de $n \times m$ y B es la matriz de $n \times m$ que resulta de hacerle a A una operación elemental, entonces $EA = B$, donde E es la matriz que representa dicha operación elemental.

Proposición 3.36. Si A es de $n \times m$ y B = F.E. de A, entonces $E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 A = B$, donde E_i son las matrices elementales que representan las operaciones elementales que llevan la matriz A en la matriz B.

Teorema 3.37. A de $n \times n$ es no singular si y sólo si A se puede escribir como producto de matrices elementales.

Teorema 3.38. A de $n \times n$ es no singular si y sólo si F.E.R de A es la matriz identidad

Teorema 3.39. Si A es de $n \times m$ y U es una forma escalonada de A, tal que U se obtiene sin necesidad de hacer operaciones del tipo I, entonces existe L triangular inferior invertible, tal que

$$A = LU$$

Definición 3.40. Una matriz P es de permutación si es producto de matrices elementales del tipo I.

Teorema 3.41. Si A es de $n \times m$ y U es una forma escalonada de A, tal que U se obtiene con la necesidad de hacer operaciones del tipo I, entonces existe L triangular inferior invertible y P una matriz de permutación tal que

$$PA = LU$$

Observación 3.42. Si $A = LU$, para resolver $Ax = b$ se hace el cambio de variable $Ux = y$.

Observación 3.43. Si $PA = LU$, para resolver $Ax = b$ se multiplica el sistema por P y luego se hace el cambio de variable $Ux = y$.

Definición 3.44. Si A es de $n \times n$ la forma cuadrática asociada a A es $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por

$$q_A(v) = v^t A v$$

Observación 3.45. Si A es de $n \times n$, se tiene que

$$q_A = q_{A^t} = q_{\left(\frac{A+A^t}{2}\right)}$$

La matriz simétrica $B = \left(\dfrac{A + A^t}{2}\right)$, es la única tal que

$$q_A = q_B$$

En adelante las matrices que definen a formas cuadráticas serán cuadradas y simétricas.

Definición 3.46. Dada A de $n \times n$, la submatriz principal A_k para $k = 1, \ldots, n$ es la matriz que resulta de eliminar la últimas $n - k$ filas y las últimas $n - k$ columnas de A. Notar que $A_n = A$.

Proposición 3.47. Si A es de $n \times n$ y sus submatrices principales $A_1, \cdots, A_{n-1}$ son invertibles, entonces A admite la descomposición LU. Si L tiene sólo unos en su diagonal, entonces L y U son únicas.

Teorema 3.48. Sea $A = A^t$. Si $A = LU$, entonces existe D diagonal tal que $A = LDL^t$.

Definición 3.49. Una matriz (o su forma cuadrática asociada) se dice:

- positiva definida si $\forall v \neq \overrightarrow{0}$, $q_A(v) > 0$.
- negativa definida si $\forall v \neq \overrightarrow{0}$, $q_A(v) < 0$.
- semidefinida positiva si $\forall v \neq \overrightarrow{0}$, $q_A(v) \geq 0$.
- semidefinida negativa si $\forall v \neq \overrightarrow{0}$, $q_A(v) \leq 0$.

Observación 3.50. Si D es diagonal, con elementos $d_1, \ldots, d_n$ en su diagonal, entonces D (o q_D) es

- positiva definida si $d_i > 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
- negativa definida si $d_i < 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
- semidefinida positiva si $d_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
- semidefinida negativa si $d_i \leq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Proposición 3.51. Sea $A = A^t$. Si A es positiva definida, entonces

- A es invertible.
- A_k es positiva definida, para todo $k = 1, \ldots, n$.
- A_k es invertible, para todo $k = 1, \ldots, n$.

Teorema 3.52. Sea $A = A^t$. A es positiva definida si y sólo si existe L triangular inferior invertible con unos en su diagonal, y D diagonal, con elementos en la diagonal positivos, tal que $A = LDL^t$.

Observación 3.53. En el teorema anterior se define a $\sqrt{D}$ como la matriz diagonal, que en su diagonal tiene las raíces positivas de los elementos de la diagonal de D. Entonces

$$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t = R^tR$$

que es llamada la descomposición con raíz cuadrada de una matriz positiva definida.

Ejemplo 3.54. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = LU \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL^t \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} = R^t R
\end{aligned}
$$

3.1. Problemas

1. Determine $A = (a_{ij})$ de tamaño

   a) (5×6) tal que $a_{ij} = min\{i, j\}$

   b) (3×4) tal que $a_{ij} = max\{i, j\}$

   c) (4×4) tal que $a_{ij} = 2i - j$

   d) (4×3) tal que $a_{ij} = 2i + j$

   e) (2×3) tal que $a_{ij} = i^2 - j^2$

   f) (3×3) tal que $a_{ij} = \begin{cases} i^2 & \text{si } i = j \\ j & \text{si } i \neq j \end{cases}$

2. Sean $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$, $A = [v_1\ v_2\ v_3]$ de 2×3 y $B = [v_2\ 2v_2]$ de 2×2 tal que

   $A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = B.$

   Calcule $A \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño 3×3 donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+1 = j \\ 0 & \text{si } i+1 \neq j \end{cases}$$

Pruebe que $A^3 = 0$ y $A^2 \neq 0$.

4. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) AB

b) $5A + 3D$

c) $B^t + D$

d) C^2

e) $2A - D$

f) BCD

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $A(A^tA)^{-1}A^t$.

b) Calcule $B(B^tB)^{-1}B^t$.

c) Demuestre que $A(A^tA)^{-1}A^t + B(B^tB)^{-1}B^t = I$.

6. Sea A una matriz de $n \times m$ con columnas L.I. Demuestre que si $P = A(A^tA)^{-1}A^t$, entonces $P^2 = P$ y $P = P^t$.

7. Sea A una matriz de 3×3 tal que

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; A\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Calcule A^{-1}.

8. Sea B una matriz cuadrada tal que $B^3 - B^2 - 5B + 5I = 0$. Escriba B^{-1} en función de B.

9. Calcule A^n para todo $n \in \mathbb{N}$ si

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Encuentre todas las matrices (2×2) que conmutan con

    a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

    b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

11. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño 5×5 donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+1 = j \\ 0 & \text{si } i+1 \neq j \end{cases}$$

Pruebe que $A^5 = I$ y $A^4 \neq 0$.

12. Si A es una matriz antisimétrica, demuestre que A^2 es simétrica.

13. Demuestre que para toda $A \in M_n(\mathbb{R})$, la matriz $\dfrac{(A + A^t)}{2}$ es simétrica y la matriz $\dfrac{(A - A^t)}{2}$ es antisimétrica.

14. Demuestre que el producto de matrices triangulares superiores (inferiores) es una matriz triangular superior (inferior).

15. Calcule las inversas por la izquierda y derecha (cuando sea posible), Ker, Im, espacio de columnas y espacio fila de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

16. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Demuestre que A es no singular si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

17. Demuestre que si una matriz cuadrada tiene una fila de ceros entonces no es invertible.

18. Demuestre que si una matriz cuadrada tiene una columna de ceros entonces no es invertible.

19. Demuestre que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 0$, entonces $I - A$ es invertible.

20. Demuestre que si A es una matriz cuadrada tal que $A^3 = 0$, entonces $I - A$ es invertible.

21. Demuestre que el producto de matrices triangulares inferiores (superiores) con $1's$ en su diagonal es triangular inferior (superior) con $1's$ en su diagonal.

22. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se dice que
    - A es involutiva si $A^2 = I_n$,
    - A es idempotente si $A^2 = A$ y
    - A es ortogonal si $AA^t = I_n$.

    Demuestre o de un contraejemplo:

    a) Si A es involutiva y ortogonal, entonces A es simétrica.

    b) Si A es simétrica e involutiva, entonces A es ortogonal.

    c) Si A es simétrica y ortogonal, entonces A es involutiva.

    d) Si A es idempotente, entonces A es involutiva.

23. Escriba las siguientes matrices como producto de matrices elementales

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

24. Escriba una matriz que no tenga inversa por la derecha ni por la izquierda.

25. Demuestre que si A tiene inversa por la derecha, entonces A^t tiene inversa por la izquierda.

26. Caracterice a las transpuesta e inversa de una matriz elemental del tipo I (II, III).

27. Sea A una matriz 1-1 de $n \times m$. Demuestre que si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es L.I., entonces $\{Av_1, \ldots, Av_r\}$ es L.I.

28. Sea $A = [v_1\ v_2\ v_3]$ una matriz de $n \times 3$. Demuestre que:
Si la forma escalonada reducida de A^tA es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es L.D.

29. Sea $A = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6]$ una matriz de 4×6, tal que su forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

a) Determine un conjunto generador de vectores L.I. para $C(A)$.

b) Determine el $\text{Ker}(A)$.

c) Determine si $\{v_1, v_2, v_4\}$ es L.I. o L.D.

30. Sea A de 3×4 tal que existen $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\ Av_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ ,\ Av_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) Demuestre que el sistema $Ax = b$ es consistente para todo $b \in \mathbb{R}^3$

b) Determine un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

31. Determine la descomposición palu de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

32. Use PA=LU para resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \end{aligned}$$

33. Use palu para determinar la primera fila de A^{-1}. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

34. Sea A de $n \times m$ tal que admite la factorización $A = LU$. Demuestre que si U tiene inversa por la izquierda, entonces A tiene inversa por la izquierda.

35. Suponga que U se obtiene de hacer en A el intercambio de la fila 1 con la 2 y luego restar la fila 2 a la fila 3. Use $PA = LU$ para resolver el sistema $Ax = b$ donde:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

36. Use Cholesky para clasificar las siguientes formas cuadráticas y exprésela-las como una suma ponderada de cuadrados.

    - $x^2 - 2xy + 2xz + 4yz + 2y^2 + 15z^2$.
    - $x^2 + 4xy + 2xz + 4yz + y^2 + z^2$.

37. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$. Demuestre que AA^t es positiva definida.

38. Encuentre la factorización de Cholesky de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

39. Sea A de 2×3 tal que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

a) Demuestre que el sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ es consistente para todo $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

Primero se observa que:

$$A\left(y_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = y_1 A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = y_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + y_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se resuelve:

$$y_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + y_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2-a}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{3} \end{bmatrix}$$

Entonces basta tomar $y_1 = \dfrac{2-a}{3}$, $y_2 = \dfrac{a+1}{3}$.

y se tiene que:

$$A\left(\frac{2-a}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{a+1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

b) Demuestre que A tiene inversa por la derecha.

Solución:

Usando la primera parte de la pregunta se tiene que:

existe u tal que $Au = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y existe v tal que $Av = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

por lo tanto:

$Ax = e_j$ tiene solución para $j = 1, 2$
entonces A es sobre, luego A tiene inversa por la derecha.

40. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Calcule el Ker(A) y la Im(A).

Solución:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces se tiene que $\text{Ker}(A) =< \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} >$

y se tiene que $\text{Im}(A) =< \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} >$

b) Decida (justificadamente) si A es inyectiva y/o sobre.

Solución:

Dado que el rango de A es 3 que es el mismo que el número de filas de la matriz, se tiene que A es sobre.

Dado que el rango de A es 3 que es el mayor que el número de columnas de la matriz, se tiene que A no es inyectiva.

c) [2*p*] Decida (justificadamente) si A tiene inversa por la izquierda y/o derecha. Si existe alguna, encuéntrela.

Solución:

Dado que A no es inyectiva, entonces A no puede tener inversa por la izquierda.

Dado que A es sobre, entonces A tiene inversa por la derecha:

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/2 & 3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5/4 & 2 & -1/4 \end{array}\right]$$

Por lo tanto las inversas por la derecha de A son de la forma:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1/4-\alpha & -1-\beta & 1/4-\gamma \\ -1/2+\alpha & 3+\beta & -1/2+\gamma \\ -5/4+\alpha & 2+\beta & -1/4+\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right] \text{ para } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

41. Sea A de 3×4 tal que la F.E.R. de $[A \mid I]$ es

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Sin calcular A ni A^t:

a) Determine el $\text{Ker}(A)$.

b) Determine el $\text{Ker}(A^t)$.

c) Determine si A tiene inversas por la derecha y/o izquierda. Si existen encuéntrelas.

d) Determine la solución general de $A^t x = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]$.

42. *a*) Sea A una matriz $1-1$ de $n \times 3$. Demuestre que la imagen por A del hiperplano $x_2 = 0$ es un conjunto generado por dos vectores L.I.

b) ¿Existe una matriz de 2×3 tal que la suma de cada fila y cada columna sea 1? (Construya un sistema de ecuaciones y luego decida si es consistente).

43. Sea A una matriz de 3×2. Demuestre que si A^tA es invertible, entonces A es inyectiva.

Solución:

Dado que A^tA es invertible, se tiene que existe B de 2×2 tal que $BA^tA = I$.

Asociando, se tiene que BA^t es una inversa por la izquierda de A.

Por lo tanto las columnas de A son LI y se tiene que A es inyectiva.

44. Sean A y B matrices de 2×3 y E una matriz elemental tal que $AE = B$. Demuestre que $\text{Im}(A) = \text{Im}(B)$.

Solución:

Sea $b \in \text{Im}(B)$, entonces $Bx = b$ tiene solución, reemplazando:

$AEx = b$ tiene solución, entonces $Ay = b$ tiene solución, luego $b \in \text{Im}(A)$.

Dado que E es invertible, se tiene que $A = BE^{-1}$.

Sea $b \in \text{Im}(A)$, entonces $Ax = b$ tiene solución, reemplazando:

$BE^{-1}x = b$ tiene solución, entonces $By = b$ tiene solución, luego $b \in \text{Im}(B)$.

45. Escriba la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ como producto de matrices elementales.

Solución:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces existen tres matrices elementales tales que $E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$, entonces $A = {E_1}^{-1} \cdot {E_2}^{-1} \cdot {E_3}^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

46. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

a) Calcule la descomposición $A = LU$ de la matriz A.

Solución:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

b) Use la descomposición anterior para determinar la suma de la primera y cuarta columna de la inversa de A.

Solución:

Primera forma:

Se resuelve $Ax = e_1$ es decir $LUx = e_1$, con el cambio $Ux = y$.

Al resolver $Ly = e_1$ queda $y = (1, -1, 1, 0)^t$.

Al resolver $Ux = y$ queda $x = (1/3, 1/3, -1/3, 0)^t$.

Se resuelve $Ax = e_4$, es decir $LUx = e_4$, con el cambio $Ux = y$.
Al resolver $Ly = e_4$ queda $y = (0, 0, 0, 1)^t$.

Al resolver $Ux = y$ queda $x = (-16/5, 8/5, -2/5, -1/5)^t$.

Sumando ambos vectores queda que la suma de la primera y cuarta columna de la inversa de A es $(-43/15, 29/15, -11/15, -1/5)^t$.

Segunda forma:

Se resuelve $Ax = e_1 + e_4$, es decir $LUx = e_1 + e_4$, con el cambio $Ux = y$.
Al resolver $Ly = e_1 + e_4$ queda $y = (1, -1, 1, 1)^t$.

Al resolver $Ux = y$ queda $x = (-43/15, 29/15, -11/15, -1/5)^t$.

47. Sea A una matriz de 4×3 tal que admite la descomposición $PA = LU$. Demuestre que A tiene inversa por la izquierda si y sólo si U tiene inversa por la izquierda.

Solución:

$(\rightarrow)$
Si A tiene inversa por la izquierda, entonces existe X tal que $XA = I$.

Dado que se tiene $PA = LU$, como P es invertible, pues es matriz de permutación,

se tiene $A = P^{-1}LU$, entonces $XA = XP^{-1}LU$.

Luego $I = XP^{-1}LU$, por lo tanto $XP^{-1}L$ es una inversa por la izquierda de U.

($\leftarrow$)
Si U tiene inversa por la izquierda, entonces existe Y tal que $YU = I$.

Dado que se tiene $PA = LU$, como L es invertible,

se tiene $L^{-1}PA = U$, entonces $YL^{-1}PA = YU$.

Luego $YL^{-1}PA = I$, por lo tanto $YL^{-1}P$ es una inversa por la izquierda de A.

48. Sea A simétrica positiva definida. Demuestre que $A + I$ es simétrica positiva definida.

    Solución:

    $A + I$ es simétrica pues $(A + I)^t = A^t + I^t = A + I$.

    $A + I$ es positiva definida pues:
    dado $x \neq \overrightarrow{0}$, $x^t(A + I)x = x^tAx + x^tx$

    El primer sumando es positivo pues A es positiva definida.

    El segundo sumando es positivo pues es la norma al cuadrado del vector x.

    Por lo tanto $x^t(A + I)x = x^tAx + x^tx > 0$

49. Clasifique la forma cuadrática

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy - 4xz - 2yz$$

Mediante un cambio de variables adecuado, exprésela como una suma ponderada de cuadrados.

Solución:

La matriz asociada a la forma cuadrática q es $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.
Entonces

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & -4/9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 9/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}.$$

Usando Cholesky

$$LDL^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & -4/9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -4/9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado que $2, 9/2, 1/9$ son positivos, entonces q es positiva definida.

(Otra manera equivalente de clasificar q es calcular los determinantes de las submatrices principales: $|A_1| = 2$, $|A_2| = 9$, $|A_3| = 1$. Como todos son positivos, entonces la forma cuadrática es positiva definida.)

Entonces

$$q(x, y, z) = 2(x - y/2 - z)^2 + 9/2(y - 4/9z)^2 + 1/9(z)^2.$$

Capítulo 4

Determinantes

Definición 4.1. Determinante es una función: Det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que:

- $|I| = 1$
- Si $E_I A = B \to -|A| = |B|$
- Si $E_{II} A = B \to \lambda|A| = |B|$
- Si $E_{III} A = B \to |A| = |B|$

Observación 4.2. $|E_I| = -1$, $|E_{II}| = \lambda$, $|E_{III}| = 1$

Observación 4.3. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $|A| = ad - bc$

Definición 4.4. Menor i, j de una matriz A es el determinante de la matriz que resulta de eliminar de A la fila i y la columna j. Notación: $M_{i,j} =$

Definición 4.5. Cofactor i, j de una matriz A es $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$

Teorema 4.6. $|A| = a_{i,1}C_{i,1} + \ldots + a_{i,n}C_{i,n}$ para todo $i = 1, \ldots, n$

Proposición 4.7. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces

- Si A tiene dos filas iguales, entonces $|A| = 0$.
- Si A tiene una fila nula, entonces $|A| = 0$.

- Si A es triangular o diagonal, entonces $|A| = \Pi a_{i,i}$.

Teorema 4.8. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.

Teorema 4.9. Sean A y B matrices cuadradas. Entonces $|AB| = |A|\,|B|$.

Proposición 4.10. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces

- $|A^t| = |A|$
- Si A es invertible, entonces $|A^{-1}| = 1/|A|$

Proposición 4.11. La función determinante es lineal en las filas y en las columnas.

Proposición 4.12. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces

- Si $PA = LU$, entonces $(-1)^k|A| = \Pi u_{i,i}$
- Si $A = LDL^t$, entonces $|A| = \Pi d_{i,i}$

Definición 4.13. Sea A una matriz de cuadrada. La adjunta de A: $\text{Adj}(A) = (c_{i,j})^t$.

Teorema 4.14. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces $A \cdot \text{Adj}(A) = \text{Adj}(A) \cdot A = |A|\, I$

Proposición 4.15. Sea A una matriz de cuadrada. Si A es invertible, entonces $A^{-1} = 1/|A|\ \text{Adj}(A)$

4.1. Problemas

1. Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $|A| = 5$, encuentre $|2A|$, $|4A|$, $|2^k A|$, $|A^5|$, $|-A|$, $|A^{-1}|$, $||A|A^{-1}|$, $|A^{-3}|$, $||A|A|$

2. Sean $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$, encuentre el $|A|$ si
   $A = [v_1 - v_3 + v_4 \quad -v_2 - v_3 \quad v_3 - v_1 \quad v_1 + v_2 + 2v_4] \in M_4(\mathbb{R})$

3. Sea A de 5×5 tal que $\text{Det}(A - I) = 0$.
   Demuestre que existe $v \in \mathbb{R}^5$ tal que $Av = v$.

4. Sea A de 4×4 tal que existen $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ linealmente independientes tales que

$$\begin{aligned} Av_1 &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 \\ Av_2 &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ Av_3 &= v_1 + 2v_2 \\ Av_4 &= v_1 \end{aligned}$$

   Demuestre que $\text{Det}(A)$ es un número natural múltiplo de 4.

5. Dé un ejemplo de matrices tal que $|A + B| \neq |A| + |B|$.

6. Sea $A = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_{n-1}\ v_n]$ y $B = [v_n\ v_{n-1}\ \ldots\ v_2\ v_1]^t$. Encuentre una relación entre $|A|$ y $|B|$

7. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $Ae_2 = 8e_2$. Demuestre que $|A - 8I| = 0$

8. Usando determinantes, determine el valor de k tal que las siguientes matrices sean invertibles

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & k \\ 1 & 2 & k & 0 \\ 2 & k & 1 & 0 \\ k & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k & 1 & k \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k & 0 \end{bmatrix}$

9. Resuelva la ecuación $\text{Det}(A) = 0$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & x & 3 \end{bmatrix}$$

10. Calcule la inversa de las siguientes matrices mediante la matriz adjunta

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

11. Sea $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. Demuestre que

a) $A_\alpha^2 = A_{2\alpha}$.

b) $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha\beta}$.

12. Demuestre que $\text{Det}\begin{bmatrix} x+1 & 0 & x+2 & 0 \\ 0 & x+3 & 0 & x+4 \\ x+5 & 0 & x+6 & 0 \\ 0 & x+7 & 0 & x+8 \end{bmatrix}$ no depende de x.

13. Sea p un número primo. Determine condiciones sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Det}(A) = 0$, con

$$A = \begin{bmatrix} p & 0 & p+1 & 0 & p+2 \\ 0 & p+3 & 0 & p+4 & 0 \\ p+5 & 0 & p+6 & 0 & p+7 \\ 0 & p+8 & 0 & p+9 & 0 \\ p+10 & 0 & p+11 & 0 & 5n+12 \end{bmatrix}$$

14. Sea $a \in \mathbb{R}$, calcule el determinante de la siguiente matriz de $n \times n$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix}$$

Solución:

Si $a = 1$, quedan todas las filas iguales y entonces el determinante es 0.

Haciendo las operaciones: $F_i \to F_i - F_{i+1}$, para $i = 1, \ldots, n-1$ queda:

$$= \begin{vmatrix} a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Haciendo las operaciones: $F_i \to (1/(a-1))F_i$, para $i = 1, \ldots, n-1$ queda:

$$= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Haciendo las operaciones: $F_n \to F_n - F_1$, ..., $F_n \to F_n - F_{n-1}$ queda:

$$= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a+n-1 \end{vmatrix}.$$

Queda una matriz diagonal, entonces el determinante pedido es:

$(a-1)^{n-1}(a+n-1)$.

15. Sean v_1, v_2, v_3 vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ y A matriz de 3×3, tal que: $Av_1 = v_2$, $Av_2 = v_3$ y $Av_3 = v_1$. Demuestre que $\text{Adj}(A) = A^{-1}$.

Solución:

Matricialmente se tiene:

$A \cdot [v_1\ v_2\ v_3] = [v_2\ v_3\ v_1]$.

Tomando determinantes queda $|A \cdot [v_1\ v_2\ v_3]| = |A| \cdot |[v_1\ v_2\ v_3]| = |[v_2\ v_3\ v_1]|$.

Dado que $|[v_2\ v_3\ v_1]| = -|[v_3\ v_2\ v_1]| = |[v_1\ v_2\ v_3]|$,

se tiene que $|A| \cdot |[v_1\ v_2\ v_3]| = |[v_1\ v_2\ v_3]|$.

Pero v_1, v_2, v_3 es LI, entonces la matriz $[v_1\ v_2\ v_3]$ es invertible, por lo tanto su determinantes es distinto de 0.

Luego $|A| = 1$.

Dado que $A \cdot \text{Adj}(A) = 1 \cdot I$, entonces $\text{Adj}(A) = A^{-1}$.

16. Use el método de Cramer para encontrar la intersección de los siguientes hiperplanos: $2x_1 + x_2 = 4$, $x_2 + 2x_3 = 0$ y $x_1 + 2x_2 = 5$

Solución:

El sistema queda: $Ax = b$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

$|A| = -6$.

Entonces:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} / -6 = -6/-6 = 1$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} / -6 = -12/-6 = 2$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} / -6 = 6/-6 = -1$$

Capítulo 5

Espacios vectoriales

Definición 5.1. Cuerpo o campo $K, +, \cdot$ conjunto tal que con las operaciones suma y multiplicación cumple:

- $+$ es cerrada: $\forall \alpha, \beta \in K \ \alpha + \beta \in K$
- $+$ es asociativa: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in K \ (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- $+$ es conmutativa: $\forall \alpha, \beta \in K \ \alpha + \beta = \beta + \alpha$
- Existe un neutro para la $+$: $\exists 0 \forall \alpha : 0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$
- Existe un inverso para la $+$: $\forall \alpha \exists \beta : \alpha + \beta = \beta + \alpha = 0$
- $\cdot$ es cerrada: $\forall \alpha, \beta \in K \ \alpha \cdot \beta \in K$
- $\cdot$ es asociativa: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in K \ (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
- $\cdot$ es conmutativa: $\forall \alpha, \beta \in K \ \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- Existe un neutro para la $\cdot$: $\exists 1 \forall \alpha : 1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$
- Existe un inverso para la $\cdot$: $\forall \alpha \neq 0 \exists \beta : \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1$
- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in K \ \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Ejemplo 5.2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$

Definición 5.3. Un conjunto no vacío V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K si existen dos operaciones: suma y multiplicación por escalar tal que:

- $+$ es cerrada: $\forall u, v \in V \; u + v \in V$
- $+$ es asociativa: $\forall u, v, w \in V \; (u + v) + w = u + (v + w)$
- $+$ es conmutativa: $\forall u, v \in V \; u + v = v + u$
- Existe un neutro para la $+$: $\exists \overrightarrow{0} \forall u : \overrightarrow{0} + u = u + \overrightarrow{0} = u$
- Existe un inverso para la $+$: $\forall u \exists (-u) : u + (-u) = (-u) + u = \overrightarrow{0}$
- $\cdot$ es cerrada: $\forall u \in V, \alpha \in K \; \alpha \cdot u \in V$
- $\forall u, v \in V, \alpha \in K \; \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
- $\forall u \in V, \alpha, \beta \in K \; (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
- $\forall u \in V, \alpha, \beta \in K \; (\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta u)$
- $\forall u \in V \; 1 \cdot u = u$

A los elementos de V se les llama vectores.

Ejemplo 5.4. Algunos espacios vectoriales:

- $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$.
- $P_n(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.
- $M_{n,m}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.
- $C[a, b]$ sobre $\mathbb{R}$.
- $M_{n,m}(\mathbb{Z}_p)$ sobre $\mathbb{Z}_p$.

Proposición 5.5. Si V es un espacio vectorial sobre K, entonces

- $\overrightarrow{0}$ es único.
- $-(u + v) = (-u) + (-v)$.
- $-u$ es único.
- $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- $0 \cdot u = \vec{0}$.

Definición 5.6. Una combinación lineal de vectores $v_1, \ldots, v_m$ es un vector de la forma $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$.

Ejemplo 5.7. En $C[0, \pi]$, $1 \cdot \text{sen}^2 + 1 \cdot \cos^2 = 1$.

Definición 5.8. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$.

- S es linealmente independiente si la única manera de construir al vector cero es la trivial:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0} \rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$$

- S es linealmente dependinete si es posible construir al vector cero de manera no trivial:

$$\exists \alpha_1, \ldots \alpha_m \text{ no todos nulos, tal que } \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}$$

Observación 5.9. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Entonces

- S es LI si y sólo si todo subconjunto de S es LI.
- S es LD si y sólo si todo conjunto que contiene a S es LD.

Teorema 5.10. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$. S es LD si y sólo si existe $v \in S$ que es combinación lineal del resto de los vectores de S.

Definición 5.11. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$. El conjunto generado por S es $< S >=< v_1, \ldots, v_m >= \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$, tal que $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$

Observación 5.12. $\{\vec{0}\}$es L.D.

Observación 5.13. Sean S_1 y S_2 conjuntos de vectores de un espacio vectorial V.

- Si $S_1 \subset S_2$, entonces $< S_1 > \subset < S_2 >$
- Si $S_1 \subset < S_2 >$, entonces $< S_1> \subset < S_2 >$

Proposición 5.14. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$. v_j es combinación lineal de vectores de $S \leftrightarrow < S >=< S - \{v_j\} >$

Proposición 5.15. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Si S es LI y $v \in < S >$, entonces v se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de S.

Definición 5.16. Sea V un espacio vectorial sobre K y $U \subseteq V$. U es un subespacio de V si es distinto del vacío y con las operaciones heredadas de V es un espacio vectorial. Notación: $U \leqslant V$

Proposición 5.17. $U \leqslant V$ si U es no vacío, es cerrado bajo la suma y es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

Observación 5.18. $< S >$ es el subespacio mas pequeño que contiene a S.

Teorema 5.19. Sean U_1, U_2 subespacios de V. Entonces

- $U_1 \cap U_2$ es subespacio de V.
- $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \ : \ u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ es subespacio de V. Si en este caso, $U_1 \cap U_2 = \{\overrightarrow{0}\}$, entonces se dice que la suma es directa y se denota: $U_1 \oplus U_2$.

Teorema 5.20. Si $V =< v_1, \ldots, v_n >$ tal que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es L.I., entonces todo conjunto L.I. de V contiene a lo más n elementos.

Definición 5.21. $B \subset V$ es una base de V si B es LI y $< B >= V$.

Teorema 5.22. Si B es una base de V y la cardinalidad de B es n, entonces todas las bases de V tienen n elementos. Se dice que la dimensión de V es n. Notación: $\text{Dim}(V) = n$.

Proposición 5.23. Si $\text{Dim}(V) = n$, entonces

- S es LI $\rightarrow \#S \leqslant n$.
- $< S >= V \rightarrow \#S \geqslant n$.

Proposición 5.24. Si $\text{Dim}(V) = n$ y $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces

- S es LI $\rightarrow < S >= V$.
- $< S >= V \rightarrow S$ es L.I.

Observación 5.25. Si U es subespacio de V y $\text{Dim}(V) = n$, entonces $\text{Dim}(U) \leqslant \text{Dim}(V)$

Teorema 5.26. Sean U_1, U_2 subespacios de V. Entonces

$$\text{Dim}(U_1 + U_2) = \text{Dim}(U_1) + \text{Dim}(U_2) - \text{Dim}(U_1 \cap U_2)$$

Proposición 5.27. Sea A de $n \times m$. Entonces

- $C(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión igual al rango de A.
- $F(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ de dimensión igual al rango de A.
- A^t es de $m \times n$, $F(A^t) = C(A)$ y $C(A^t) = F(A)$.

Definición 5.28. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $v \in V$ tal que $v = x_1 v_1 + \ldots x_n v_n$. El vector coordenado de x en la base B es:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Proposición 5.29. Sean $u, v \in V$ y B una base de V. Entonces

- $[u + v] = [u] + [v]$.
- $[\alpha u] = \alpha[u]$.
- $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es L.I. si y sólo si $\{[u_1], \ldots, [u_m]\}$ es L.I.
- $u \in < u_1, \ldots, u_m >$ si y sólo si $[u] \in < [u_1], \ldots, [u_m] >$.

Definición 5.30. Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bases de V. Se define la matriz $P_2^1 = [\ [v_1]_2 \ \ldots \ [v_n]_2\ ]$.

Proposición 5.31. Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bases de V.

- Para todo $x \in V$: $P_2^1 \cdot [x]_1 = [x]_2$.
- P_2^1 es invertible.
- $(P_2^1)^{-1} = P_1^2$

5.1. Problemas

1. Sean A y B matrices de $n \times m$. Demuestre o dé un contraejemplo

   a) $\text{Ker}(A+B) = \text{Ker}(A) + \text{Ker}(B)$

   b) $\text{Ker}(A+B) = \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B)$

   c) $C(A+B) = C(A) + C(B)$

   d) $F(A+B) = F(A) + F(B)$

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$. Encuentre el $\text{Ker}(A)$

3. Determine si los siguientes conjuntos forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

   a) $V = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continua, tal que } f(\frac{a+b}{2}) = 0\}$

   b) $V = \{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } p(0) = 0\}$

   c) $V = \{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } p'(0) = 0\}$

   d) $V = \mathbb{C}$

   e) $V = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

   f) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } a+b+c+d = 1 \right\}$

   g) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$

   h) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } a^2+b^2+c^2 = 1 \right\}$

4. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Determine si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones

   a) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   b) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ y $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   c) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}$ y $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   d) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}$ y $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   e) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ bd \end{pmatrix}$ y $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   f) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+c \end{pmatrix}$ y $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   g) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+c^2} \\ \sqrt{b^2+d^2} \end{pmatrix}$ y $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha a} \\ \sqrt{\alpha b} \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   h) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{a^3+c^3} \\ \sqrt[3]{b^3+d^3} \end{pmatrix}$ y $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\alpha a} \\ \sqrt[3]{\alpha b} \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

5. Sea $V = \mathbb{R}^+$, se define

   $x \oplus y = xy \quad , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
   $\alpha \odot x = x^\alpha \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

   Demuestre que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones.

6. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$

   a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad x + y - 2z = 0 \ , \ 2x + y + z = 0 \right\}$

$b)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad xyz \geq 0 \right\}$

$c)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad x = y^2 \ , \ x + y + z \geq 0 \right\}$

$d)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$

7. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial indicado

$a)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ de $\mathbb{R}^2$

$b)$ $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \\ \alpha + 3\beta \\ 4\beta - \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$ de $\mathbb{R}^4$

$c)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$ de $\mathbb{R}^n$

$d)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \ \sum_{i=1}^{n} (2x_i) = 0 \right\}$ de $\mathbb{R}^n$

$e)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \ x_1 \neq x_2 \right\}$ de $\mathbb{R}^n$

$f)$ $\{v \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \ ||v|| = 1\}$ de $\mathbb{R}^n$

$g)$ $\{v \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que } v \cdot a = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^n \text{ fijo } \} \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^n$

$h)$ $\{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } p(0) + p'(0) = 1\} \quad \text{de} \quad P_n(\mathbb{R})$

$i)$ $\{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } p(0) \text{ es un número par } \} \quad \text{de} \quad P_n(\mathbb{R})$

$j)$ $\{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } p(x) = p'(x)\} \quad \text{de} \quad P_n(\mathbb{R})$

$k)$ $\left\{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } \int_0^1 xp(x)\,dx = 0\right\} \quad \text{de} \quad P_n(\mathbb{R})$

$l)$ $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } tr(A) = 0\} \quad \text{de} \quad M_n(\mathbb{R})$

$m)$ $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } A = A^t\} \quad \text{de} \quad M_n(\mathbb{R})$

$n)$ $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } A = -A^t\} \quad \text{de} \quad M_n(\mathbb{R})$

$\tilde{n})$ $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } A^2 = I_n\} \quad \text{de} \quad M_n(\mathbb{R})$

$o)$ $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } AB = BA \quad \text{con } B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ fija } \} \quad \text{de} \quad M_n(\mathbb{R})$

$p)$ $\{f(x) \in C[0,1] \quad \text{tal que } f(x) \quad \text{es una función par } \} \quad \text{de} \quad C[0,1]$

$q)$ $\{f(x) \in C[0,1] \quad \text{tal que } f(x) \quad \text{es una función impar } \} \quad \text{de} \quad C[0,1]$

8. Determine si el vector v en el espacio vectorial correspondiente, es combinación lineal de los vectores que se indican

$a)$ $v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{de} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$b)$ $v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{de} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$c)$ $v = \tan^2(x) \in C[0,\pi] \quad \text{de} \quad 1\ ,\ \sec^2(x)$

$d)$ $v = \tan^2(x) \in C[0,\pi]$ de $\sin^2(x)\ ,\ \cos^2(x)$

9. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $u \in V$ y $S \subseteq V$ L.I. Demuestre que

$$S \cup \{u\} \text{ es L.I. } \longleftrightarrow u \text{ no es C.L. de elementos de } S$$

10. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y los conjuntos de vectores

$$S_1 = \{u_1, \cdots, u_n\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{v_1, \cdots, v_m\}$$

Demuestre que $< S_1 >=< S_2 >$ si y sólo si cada u_i es combinación lineal de los v_j y cada v_j es combinación lineal de los u_i.

11. Demuestre que todo subconjunto de un conjunto de vectores L.I. es también L.I.

12. Demuestre que todo conjunto que contiene un conjunto de vectores L.D. es también L.D.

13. Considere el espacio vectorial $V = M_2(\mathbb{R})$ y $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ un vector no nulo. Demuestre que el siguiente conjunto U es un subespacio de V.

$$U = \{A \in V \ :\ adj(A)\ v = \overrightarrow{0}\}$$

14. Considere el espacio vectorial $P_3(\mathbb{R})$. Determine si el siguiente conjunto es L.I. o L.D.

$$\{p_i(x) = \sum_{j=0}^{i} x^j \in P_3(\mathbb{R}) \quad \text{para} \ \ i = 0, 1, 2, 3\}$$

15. Sea $\{u_1, u_2, u_3\}$ un conjunto L.I. en $\mathbb{R}^4$. Considere las matrices

$$A_1 = [u_1 \ \ u_2 \ \ u_3] \quad , \quad A_2 = [u_2 \ \ u_1 \ \ u_3] \quad , \quad A_3 = [u_2 \ \ u_3 \ \ u_1]$$

Demuestre que $S = \{A_1, A_2, A_3\}$ es un conjunto L.I. en $M_{4,3}(\mathbb{R})$.

16. Sea A de 5×4. Demuestre que el siguiente conjunto U es un subespacio de $\mathbb{R}^5$.

$$U = \{b \in \mathbb{R}^5 \ : \ Ax = b \quad \text{es consistente}\}$$

17. Encuentre una base de los siguientes espacios vectoriales

a) $V = \{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } p(0) = 0\}$

b) $V = \mathbb{C}$

c) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } a+b+c+d=0 \right\}$

d) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$

18. Determine si los siguientes conjuntos son una base del espacio vectorial indicado

a) $\{1, 1+x^2, 1-x-2x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

19. Determine valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que los vectores columna de la matriz A sean una base de $\mathbb{R}^3$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & k & -1 \\ k & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

20. Sea $U = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : \ p(-1) = 0 \ \}$

a) Demuestre que U es subespacio de $P_3(\mathbb{R})$

b) Encuentre una base de U

c) Determine $\operatorname{Dim} U$

21. Sean $U_1, \cdots, U_m$ subespacios de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Demuestre que $\bigcap_{i=1}^{m} U_i$ es un subespacio vectorial de V.

22. Sean U_1 y U_2 subespacios de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Determine si $U_1 \cup U_2$ es un subespacio vectorial de V. (Demuestre o encuentre un contraejemplo).

23. Sean U_1 y U_2 subespacios de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Demuestre que el conjunto $U_1 + U_2$ definido por

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \text{ tal que } u_1 \in U_1 \text{ y } u_2 \in U_2\}$$

es también un subespacio vectorial de V.

24. Sea $S = \{\ 1\ ,\ x + x^2\ ,\ 1 + x + x^2\ ,\ x^3\ ,\ x + x^2 + x^3\ \}$ en $P_3(\mathbb{R})$

a) Encuentre una base B de $< S >$ tal que $B \subseteq S$

b) Si $U =< x - x^2 >$, demuestre que $U \oplus < S >= P_3(\mathbb{R})$

25. Considere el espacio vectorial $V = C[0, 2\pi]$ y el conjunto

$$U = \{f(x) \in V \ :\ f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0\}$$

Demuestre que U es subespacio de V.

26. Considere los siguientes subespacios de $P_3(\mathbb{R})$:

$U_1 =< 3 - 2x + x^2 + x^3 \ ,\ -1 + x^2 - x^3 \ ,\ 2 - x + x^3 >$
$U_2 =< 2 - x + 2x^2 + x^3 \ ,\ -x - x^3 \ ,\ 3 - 2x + 3x^2 + x^3 >$

- Encuentre una base y la dimensión de U_1, U_2, $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$.
- Encuentre una base y la dimensión de U_3 tal que $(U_1 \cap U_2) \oplus U_3 = P_3(\mathbb{R})$.

27. Determine la dimensión de los siguientes espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

$a)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad x+y-2z=0 \right\}$

$b)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$c)$ $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+2\beta \\ \alpha+3\beta \\ 4\beta-\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$

$d)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que } \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$

$e)$ $\{v \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que } v \cdot a = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^n \text{ fijo } \}$

$f)$ $\{p(x) \in P(n, \mathbb{R}) \quad \text{tal que } p(x) = p'(x)\}$

$g)$ $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } tr(A) = 0\}$

$h)$ $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } A = A^t\}$

28. Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión $2n$, con $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que existen U_1 y U_2 subespacios de V tal que

$$\operatorname{Dim} U_1 = n = \operatorname{Dim} U_2 \quad \text{y} \quad U_1 \cap U_2 = \{\overrightarrow{0}\}$$

29. En $\mathbb{Z}_7$, determine el Ker de $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Cuántos elementos tiene?

Solución:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego Ker $= \{(5\alpha, 4\alpha, \alpha, 0)^t : \ \alpha \in \mathbb{Z}_7\}$.

Por lo tanto el Ker tiene 7 elementos.

30. Sea A de 4×3, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Demuestre que si $Ax = \vec{0}$ tiene solución única, entonces $\{A, AB, AC\}$ es un conjunto L.I. en $M_{4,3}(\mathbb{R})$.

Solución:

Sea $\alpha A + \beta AB + \gamma AC = 0$ (matriz nula). p.d.: $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Sea $A = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ tal que $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$.

Y entonces $AB = [v_3 \ v_1 \ v_2]$ y $AC = [v_3 \ v_2 \ v_1]$.

Entonces $[\alpha v_1 + (\beta + \gamma)v_3 \ \ \beta v_1 + (\alpha + \gamma)v_2 \ \ \gamma v_1 + \beta v_2 + \alpha v_3] = 0$

Dado que $Ax = \vec{0}$ tiene solución única, entonces se tiene que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es L.I.

De la segunda columna se tiene que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

31. Sean $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y los subespacios
$U_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \ {u_1}^t A u_1 = 0\}$ y $U_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \ {u_2}^t A u_2 = 0\}$.

a) Demuestre que U_1 es un subespacio de $M_2(\mathbb{R})$.

Solución:

U_1 es no vacío pues tomando $A = 0$ la matriz nula se tiene que ${u_1}^t 0 u_1 = 0$.

Dadas $A, B \in U_1$, se tiene que ${u_1}^t(A+B)u_1 = {u_1}^t A u_1 + {u_1}^t B u_1 = 0 + 0 = 0$.

Dada $A \in U_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que ${u_1}^t(\alpha A)u_1 = \alpha({u_1}^t A u_1) = \alpha 0 = 0$.

Por lo tanto U_1 es un subespacio de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Calcule bases y dimensión de U_1, U_2 y $U_1 \cap U_2$.

Solución:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U_1$ si $a - c - b + d = 0$.

Por lo tanto $U_1 =< \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} >$.

La dimensión de U_1 es 3 pues $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\}$ es L.I.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U_2$ si $4a + 2b + 2c + d = 0$.

Por lo tanto $U_2 =< \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} >$.

La dimensión de U_2 es 3 pues $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\}$ es L.I.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para buscar una base de $U_1 \cap U_2$ se considera la siguiente matriz de vectores coordenados con respecto a la base canónica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el Ker $=< (1,0,-1,-1,0,1)^t, (1,-1,0,-1,1,0)^t >$

Finalmente $U_1 \cap U_2 =< \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} >$

La dimensión de $U_1 \cap U_2$ es 2 pues $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\}$ es L.I.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Determine una base de un subespacio U_3 tal que $(U_1 \cap U_2) \oplus U_3 = M_2(\mathbb{R})$.

Solución:

Para buscar una base de U_3 se considera la siguiente matriz de vectores coordenados con respecto a la base canónica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dado que las primeras cuatro columnas tienen pivotes, una base de U_3 es:

$$\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}.$$

Capítulo 6

Transformaciones lineales

Definición 6.1. Sean V y W espacios vectoriales. $T : V \to W$ es una transformación lineal si $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ y $T(\alpha v) = \alpha T(v)$.

Proposición 6.2. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

- $T(\vec{0_V}) = \vec{0_W}$.
- $T(-v) = -T(v)$.

Observación 6.3. Si B es una base de V, entonces T queda determinada por cómo actúa sobre la base.

Definición 6.4. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- $\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = \overrightarrow{0_W}\}$.
- $\text{Im}(T) = \{w \in W : \exists v \in V : T(v) = w\}$.

Proposición 6.5. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- $\text{Ker}(T)$ es un subespacio de V y su dimensión es la nulidad de T.
- $\text{Im}(T$ es un subespacio de W y su dimensión es el rango de T.

Observación 6.6. Si B es una base de V, entonces $< T(B) >= \text{Im}(T)$.

Definición 6.7. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- Si T es inyectiva se dice que es un monomorfismo.
- Si T es sobre se dice que es un epimorfismo.
- Si T es inyectiva y sobre se dice que es un isomorfismo y se denota por $V \cong W$.

Teorema 6.8. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal.

- T es inyectiva si y sólo si $\text{Ker}(T) = \{\vec{0_V}\}$.
- T es sobre si y sólo si $\text{Im}(T) = W$.

Proposición 6.9. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Si T es inyectiva y $S \subset V$ es L.I., entonces $T(S)$ es L.I.

Teorema 6.10. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$\text{Dim Ker}(T) + \text{Dim Im}(T) = \text{Dim}(V).$$

Definición 6.11. Sean V y W espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal, $B_1 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de W. La matriz de T con respecto a B_1 y B_2 es una matriz de $n \times m$ dada por

$$[T]_2^1 = [\ [T(v_1)]_2\ \ \ldots\ \ [T(v_m)]_2\ ]$$

Proposición 6.12. Sean V y W espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal, $B_1 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de W. Entonces

- $[T]_2^1 \cdot [v]_1 = [T(v)]_2$, para todo $v \in V$.
- $v \in \text{Ker}(T)$ si y sólo si $[v]_1 \in \text{Ker}[T]_2^1$.
- $w \in \text{Im}(T)$ si y sólo si $[w]_2 \in \text{Im}[T]_2^1$.

- T es un isomorfismo ($V \cong W$) si y sólo si $[T]_2^1$ es cuadrada e invertible. En este caso T^{-1} es una transformación lineal y $([T]_2^1)^{-1} = [T]_1^2$.

Proposición 6.13. Sea V espacio vectorial de dimensión m y B_1 y B_3 bases de V. Sea W espacio vectorial de dimensión n y B_2 y B_4 bases de W. Hay dos matrices cambio de bases: P_3^1 y P_4^2.
Sea $T : V \to W$ y las dos matrices asociadas a T: $[T]_2^1$ y $[T]_4^3$.
Sean $x \in V, y \in W$. Entonces

- $[x]_3 = P_3^1 \cdot [x]_1$.
- $[y]_4 = P_4^2 \cdot [y]_2$.
- $[T]_2^1 \cdot [x]_1 = [T(x)]_2$.
- $[T]_4^3 \cdot [x]_3 = [T(x)]_4$.

Reemplazndo:

- $[T]_4^3 \cdot [x]_3 = [T(x)]_4$.
- $[T]_4^3 \cdot P_3^1 \cdot [x]_1 = P_4^2 \cdot [T(x)]_2$.
- $[T]_4^3 \cdot P_3^1 \cdot [x]_1 = P_4^2 \cdot [T]_2^1 \cdot [x]_1$.

Entonces $[T]_4^3 \cdot P_3^1 = P_4^2 \cdot [T]_2^1$

Esquema:

$$\begin{array}{ccccc} & & [T]_2^1 & & \\ & V & \to & W & \\ & B_1 & & B_2 & \\ P_3^1 & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & P_4^2 \\ & V & \to & W & \\ & B_3 & & B_4 & \\ & & [T]_4^3 & & \end{array}$$

Ejemplo 6.14. Un ejemplo de la relación entre matriz cambio de base y matriz de una transformación lineal es:

- Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ con las siguientes bases:

  $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

  $B_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

  La matriz cambio de base P_3^1 es $P_3^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Sea $W = P_2(\mathbb{R})$ con las siguientes bases:

  $B_2 = \{1, 1+x, 1+x^2\} \quad B_4 = \{1, x, x^2\}$

  La matriz cambio de base P_4^2 es $P_4^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a+b) + (b+c)x + (c+d)x^2$$

- La matriz de T con respecto a las bases B_1 en V y B_2 en W es:

  $[T]_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- La matriz de T con respecto a las bases B_3 en V y B_4 en W es:

  $[T]_4^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in V$ y entonces:

$$[A]_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad [A]_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Luego $T(A) = 3 + 5x + 7x^2 \in W$ y entonces

$$[T(A)]_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad , \quad [T(A)]_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- Y se cumple $[T]_2^1 \cdot [A]_1 = [T(A)]_2 \quad$ y $\quad [T]_4^3 \cdot [A]_3 = [T(A)]_4$

Proposición 6.15. Sean T y L transformaciones lineales de V en W. Entonces $(T + L) : V \to W$ dada por $(T + L)(v) = T(v) + L(v)$ es una transformación lineal, y $(\alpha T) : V \to W$ dada por $(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$ es una transformación lineal. Además $[T + L] = [T] + [L]$ y $[\alpha T] = \alpha[T]$.

Proposición 6.16. Sean $T : V \to W$ y $L : U \to V$ transformaciones lineales. Entonces $(T \circ L) : U \to W$ dada por $(T \circ L)(u) = T(L(u))$ es una transformación lineal, y $[T \circ L] = [T] \cdot [L]$.

6.1. Problemas

1. Decida cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales y en tal caso determine Ker(T), Im(T), Rango(T), Nulidad(T), una base de Ker(T) y una base de Im(T)

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$, dada por

   $$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = (a + b + c) + (a - b + 2c)x + (3b - c)x^2$$

   b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, dada por

   $$T(A) = AM + MA^t \ \text{ con } \ M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$, dada por

$$T(A) = AM + MA^t \ \text{ con } \ M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$, dada por

$$T(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} \overrightarrow{x} \cdot a & \overrightarrow{x} \cdot b \\ \overrightarrow{x} \cdot b & \overrightarrow{x} \cdot a \end{bmatrix} \ \text{ con } \ a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$T(\overrightarrow{x}) = ||\overrightarrow{x}||a \ \text{ con } \ a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$T(\overrightarrow{x}) = ||\overrightarrow{x}||$$

g) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 3a - b + 7c + d \\ 4a + b - c \\ c + 3b - d \\ a + b + c - d \end{bmatrix}\right)$$

h) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} a - b + 3c \\ d + a - b + c \\ 2c + d - a \\ a - b + c - 2d \end{bmatrix}\right)$$

2. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestre

a) Si T es inyectiva, entonces $\operatorname{Dim} V \leq \operatorname{Dim} W$

b) Si T es sobreyectiva, entonces $\operatorname{Dim} W \leq \operatorname{Dim} V$

3. Demuestre que $M_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$

4. Demuestre que $M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$

5. Demuestre que $M_2(\mathbb{R}) \cong P_3(\mathbb{R})$

6. Demuestre que $P_5(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^6$

7. Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal dada por

$$T(A) = A + A^t \quad \text{para toda } A \in M_2(\mathbb{R})$$

Encuentre la dimensión de $\operatorname{Ker}(T)$ y la dimensión de $\operatorname{Im}(T)$

8. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
Sea $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V y $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ una base de W tal que

$$[T]_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre una base B_3 de W tal que $[T]_3^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto L.I. en V. Demuestre o dé un contraejemplo.

a) Si T es inyectiva, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\}$ es un conjunto L.I. en W.

b) Si T es sobreyectiva, entonces $\text{Dim}(W) \leq k$.

10. Sea $T : M_{n,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ lineal dada por $T(A) = Au \quad , \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

    Encuentre el $\text{Ker}(T)$ y su dimensión.

11. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal tal que su matriz con respecto a las bases canónicas tiene determinante p primo. Demuestre que existen bases tal que el determinante de la matriz de T en esas bases es 1.

12. Sean V de dimensión 3 y W de dimensión 4 espacios vectoriales tal que $V =< v_1, v_2, v_3 >$ y $W =< w_1, w_2, w_3, w_4 >$. Sea $T : V \to W$ lineal tal que

$$\begin{array}{rcl} T(v_1 - v_3) & = & w_1 + w_2 \\ T(v_1 - v_2 - v_3) & = & w_1 + w_3 \\ T(v_1 - v_2 - 2v_3) & = & w_1 + w_4 \end{array}$$

    - ¿Es T es 1-1 ? ¿Es T sobre? Justifique.
    - Encuentre bases en V y W tal que la matriz de la transformación lineal sea

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

13. Sea $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal dada por $T(p(x)) = p''(1) + p'(1)x + p(1)x^2$

    a) Calcule bases para $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$.

    Solución:

    Del enunciado, $T(a+bx+cx^2+dx^3) = (2c+6d)+(b+2c+3d)x+(a+b+c+d)x^2$.

    Luego la matriz de T con respecto a las bases canónicas es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego $\text{Ker}(T) =< 1 - 3x + 3x^2 - x^3 >$.

Dado que es un polinomio, se tiene que $\{1 - 3x + 3x^2 - x^3\}$ es L.I. y por lo tanto una base de $\text{Ker}(T)$.

$\text{Im}(T) =< x, x + x^2, 2 + 2x + x^2 >$.

De las columnas pivote de la F.E. de la matriz anterior, se tiene que $\{x, x+x^2, 2+2x+x^2\}$ es L.I. y por lo tanto una base de $\text{Im}(T)$.

(Otra manera es decir que como el Ker tiene dimensión 1 y $P_3(\mathbb{R})$ tiene dimensión 4, entonces por teorema, $\text{Im}(T)$ tiene dimensión 3, y como es subespacio de $P_2(\mathbb{R})$ de dimensión 3, entonces $P_2(\mathbb{R}) = \text{Im}(T)$ y por lo tanto una base es $\{1, x, x^2\}$).

b) Determine una base de $P_3(\mathbb{R})$ tal que con la base canónica de $P_2(\mathbb{R})$, la matriz de T tenga una columna nula.

Solución:

Dado que en $P_2(\mathbb{R})$ se considera a la base canónica, entonces hay un cambio de base en $P_3(\mathbb{R})$.

Como es necesario que la matriz de T tenga una columna nula, entonces un elemento de la base debe estar en el $\text{Ker}(T)$, por ejemplo $1 - 3x + 3x^2 - x^3$.

Completando base se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dado que las primeras 4 columnas tienen pivotes entonces una base para $P_3(\mathbb{R})$ es:

$\{1, x, x^2, 1 - 3x + 3x^2 - x^3\}$.

Y entonces la matriz de T con respecto a la base anterior y la canónica en $P_2(\mathbb{R})$ es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Demuestre que existe $L : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ tal que $T \circ L$ es la tranformación identidad.

Solución:

La matriz de T con respecto a las bases canónicas es $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Como su F.E.R. es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces las filas son L.I.

Entonces la matriz tiene inversa por la derecha.

Sea C una inversa por la derecha de A, entonces $AC = I$.

Luego basta tomar a $L : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ como la transformación lineal tal que su matriz con respecto a las bases canónicas es C, pues

$[T \circ L] = [T] \cdot [L] = A \cdot C = I$.

14. Sea $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ tal que $D(p(x)) = p'(x)$. Calcule la matriz de

D con respecto a las bases canónicas y demuestre que D no es invertible.

Solución:

Con respecto a la base canónicas en dominio y recorrido la matriz de D es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que el determinante de la matriz es 0, entonces la matriz no es invertible, luego la transformación no es invertible.

15. Sean V y W espacios vectoriales , $T : V \to W$ una transformación lineal y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Demuestre que $\text{Im}(T) =< T(v_1), \dots, T(v_n) >$.

Solución:

$w \in \text{Im}(T)$

$\leftrightarrow \exists v \in V : \ T(v) = w$

$\leftrightarrow \exists v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n \in V : \ T(v) = w$

$\leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} : \ v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n : \ T(v) = w$

$\leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} : \ T(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = w$

$$\leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : \; x_1 T(v_1) + \ldots + x_n T(v_n) = w$$

$$\leftrightarrow w \in < T(v_1), \ldots, T(v_n) >$$

Capítulo 7

Ortogonalidad

Definición 7.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. V se dice que es un espacio vectorial con producto interno si existe una función $\cdot$ de $V \times V$ en $\mathbb{R}$ tal que para todo $u, v \in V$, y $\alpha \in \mathbb{R}$

- $u \cdot v = v \cdot u$
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
- $(\alpha u) \cdot v = \alpha(u \cdot v)$
- $u \cdot u \geqslant 0$ y $u \cdot u = 0$ si y sólo si $u = \vec{0}$.

Definición 7.2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno.

- Dados $u, v \in V$, u es ortogonal a v si $u \cdot v = 0$. Notación: $u \perp v$.
- $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset V$ es ortogonal si el conjunto no contiene a $\vec{0}$ y $u_i \cdot u_j = 0$ para todo $i \neq j$
- $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset V$ es ortonormal si el conjunto es ortogonal y $u_i \cdot u_i = 1, \forall i$.

Observación 7.3. En adelante se considera al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$, con el producto punto usual.

Observación 7.4. $u \perp \vec{0}$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Observación 7.5. Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ ortogonal y $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$, entonces

$$\alpha_i = \frac{u \cdot u_i}{u_i \cdot u_i}$$

Observación 7.6. Todo conjunto ortogonal es L.I., y por lo tanto una base de su conjunto generado.

Definición 7.7. Dado $U \leq \mathbb{R}^n$, el ortogonal a U es $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : u \cdot w = 0\}$.

Proposición 7.8. Sea $\mathbb{R}^n$ con el producto punto usual.

- Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de U, entonces $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : u_i \cdot w = 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m\}$.
- $\vec{0} \in U^\perp$
- $U^\perp$ es un subespacio de R^n.
- $\{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^{n\perp} = \{\vec{0}\}$.
- $U^{\perp\perp} = U$
- $U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$.
- Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ una base de U y A de $n \times m$ la matriz $A = [u_1 \ldots u_m]$. Entonces $U^\perp = \text{Ker}(A^t)$.
- $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, existen únicos $u \in U$ y $w \in U^\perp$ tal que $v = u + w$.

Proposición 7.9. Sea $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ y A de $n \times m$ la matriz $A = [u_1 \ldots u_m]$. Entonces

- S es LI si y sólo si $A^t A$ es invertible.
- S es ortogonal si y sólo si $A^t A$ es diagonal e invertible.
- S es ortonormal si y sólo si $A^t A = I$.

Definición 7.10. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $u \in U$ y $w \in U^\perp$ donde $v = u + w$.

- La proyección ortogonal sobre U es $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $P(v) = u$.
- La proyección ortogonal sobre $U^\perp$ es $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $Q(v) = w$.

Proposición 7.11. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $u \in U$ y $w \in U^\perp$ donde $v = u + w$.

- Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de U y A de $n \times m$ es la matriz $A = [u_1 \ldots u_m]$, entonces $u = Ax$, donde x es tal que $A^tAx = A^tv$.
- Si $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es una base de $U^\perp$ y B de $n \times r$ es la matriz $B = [w_1 \ldots w_r]$, entonces $w = By$, donde y es tal que $B^tBy = B^tv$.

Proposición 7.12. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^n$, P la proyección ortogonal sobre U y Q la proyección ortogonal sobre $U^\perp$. Entonces

- P y Q son transformaciones lineales.
- $P + Q = I$ (como t.l.).
- $\mathrm{Ker}(P) = U^\perp$, $\mathrm{Im}(P) = U$.
- $\mathrm{Ker}(Q) = U$, $\mathrm{Im}(Q) = U^\perp$.
- $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$ (como t.l.).
- Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de U y A de $n \times m$ es la matriz $A = [u_1 \ldots u_m]$, entonces la matriz de P con respecto a la base canónica es $P = A(A^tA)^{-1}A^t$.
- Si $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es una base de $U^\perp$ y B de $n \times r$ es la matriz $B = [w_1 \ldots w_r]$, entonces la matriz de Q con respecto a la base canónica es $Q = B(B^tB)^{-1}B^t$.
- P y Q son simétricas.
- $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$ (como matrices).
- $P + Q = I$ (como matrices).
- $2P - I = R$ es matriz de reflexión, es simétrica y $R^2 = I$.

Proposición 7.13. Gram Schmidt: Dado $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ L.I., una base ortogonal de $< S >$ es $\{u_1, \ldots, u_m\}$, donde:

- $u_1 = v_1$
- $u_2 = v_2 - \dfrac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1$
- $u_3 = v_3 - \dfrac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \dfrac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$
- ....

Observación 7.14. Descomposición QR.
Sea $A = [v_1 \cdots v_m]$ una matriz con columnas L.I. El problema es encontrar una matriz cuyas columnas formen un conjunto ortonormal que genere lo mismo que las columnas de A, es decir se busca una matriz Q tal que:

$$Q = [u_1 \cdots u_m], \ \ \mathrm{Im}(Q) = \mathrm{Im}(A) \ \text{ y } \ Q^t Q = I.$$

Sea R la matriz cambio de base de $m \times m$, es decir $A = QR$. Entonces

$$A^t A = (QR)^t QR = R^t Q^t QR = R^t I R = R^t R.$$

Dado que A es inyectiva, luego $A^t A$ es positiva definida y basta tomar su descomposición con raíz cuadrada R. Obteniendo R se calcula $Q = AR^{-1}$.

Ejemplo 7.15. Sea $U =< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} >$. Determine una base ortonormal de U.

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$A^tA = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} = R^tR$$

Luego $R^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Entonces $Q = \begin{bmatrix} 1\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1\sqrt{3} & 1\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \\ 1\sqrt{3} & -1\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Entonces $U =< \begin{bmatrix} 1\sqrt{3} \\ 0 \\ 1\sqrt{3} \\ 1\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2\sqrt{6} \\ 0 \\ 1\sqrt{6} \\ 1\sqrt{6} \end{bmatrix} >$

Proposición 7.16. Sea el sistema $Ax = b$ inconsistente y x^* tal que $\|Ax^* - b\|$ es mínima. Entonces x^* es tal que Ax^* es la proyección de b sobre $\mathrm{Im}(A)$.

7.1. Problemas

1. Sea A de 4×5. Demuestre que $F(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A)$.

2. Determine la proyección de $v = e_1 - e_3 + e_4 + e_5 \quad \in \mathbb{R}^5$ sobre el hiperplano $x_1 - x_2 + 3x_4 - x_5 = 0$.

3. Determine la matriz de proyección sobre el hiperplano $x_1 - x_2 + x_4 = 0$.

4. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que

$$P_U(e_1) = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - e_3) \quad P_U(e_2) = \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 + e_3)$$

   Determine la matriz de proyección sobre U.

5. Encuentre $\underset{x-y-2z=2}{min}\ (x-3)^2+(2y-1)^2+(z+5)^2$ usando proyecciones

6. Sea U el hiperplano en $\mathbb{R}^4$, dado por la ecuación $2x_1-x_2+x_3-2x_4=0$. Calcule bases de U y de $U^\perp$. Calcule la proyección de $v=(2,-1,3,0)^t$ sobre U y sobre $U^\perp$. Calcule la matriz de proyección sobre U y sobre $U^\perp$.

   Solución:

   Base de U: $\{(1,0,-2,0)^t,(0,1,1,0)^t,(0,0,2,1)^t\}$.

   Base de $U^\perp$: $\{(2,-1,1,-2)^t\}$.

   Matriz de proyección sobre $U^\perp$: $Q=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

   Usando $P+Q=I$.

   Matriz de proyección sobre U: $P=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 9 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 9 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

   Proyección de v sobre U: Pv, proyección de v sobre $U^\perp$: Qv.

   $Pv=\frac{1}{10}(4,-2,22,16)^t$.

   $Qv=\frac{1}{10}(16,-8,8,-16)^t$.

7. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^n$, P matriz de proyección sobre U y Q matriz de proyección sobre $U^\perp$. Demuestre que PQ es la matriz nula.

   Solución:

   Manera 1:

Sea A tal que sus columnas forman una base de U. Entonces $P = A(A^tA)^{-1}A^t$.

Sea B tal que sus columnas forman una base de $U^\perp$. Entonces $Q = B(B^tB)^{-1}B^t$.

Entonces $PQ = A(A^tA)^{-1}A^tB(B^tB)^{-1}B^t$.

Pero A^tB es la matriz nula, pues las filas de A^t son ortogonales a las columnas de B.

Entonces $PQ = 0$.

Manera 2:

Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ una base de U.

Sea $\{w_1, \ldots, w_r\}$ una base de $U^\perp$.

Entonces si $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_m + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_r w_r$.

$PQx = PQ(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_m + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_r w_r) = P(\vec{0} + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_r w_r) = \vec{0}$.

Luego $PQx = \vec{0}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces PQ es la matriz nula.

8. Sea $P = \begin{bmatrix} 6/7 & -2/7 & 1/7 & 1/7 \\ -2/7 & 3/7 & 2/7 & 2/7 \\ 1/7 & 2/7 & 6/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 & -1/7 & 6/7 \end{bmatrix}$ matriz de proyección sobre $U \leq \mathbb{R}^4$. Determine una base de U y de $U^\perp$.

Solución:

$$P \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\text{Im}(P) = C(P) = U$.

Entonces $U =< (1,0,0,1)^t, (0,1,0,2)^t, (0,0,1,-1)^t >$.

O bien $U =< (6/7, -2/7, 1/7, 1/7)^t, (-2/7, 3/7, 2/7, 2/7)^t, (1/7, 2/7, 6/7, -1/7)^t >$.

$\text{Ker}(P) = U^{\perp}$.

Entonces $U^{\perp} =< (-1,-2,1,1)^t >$.

9. Usando proyecciones, calcule

$$min \;\; (x+y)^2 + (2x-y-2)^2 + (y-6)^2 + (y-x-2)^2$$

Solución:

El problema se traduce en encontrar la proyección de $b = (0,2,6,2)^t$ sobre $C(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

El sistema es: $A^t A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^t b$.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

La solución es $x = 1$, $y = 2$.

Entonces el mínimo es 30.

Capítulo 8

Valores y vectores propios

Definición 8.1. Sea A de $n \times n$, $v \neq \vec{0}$ es un vector propio de A si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$. Se dice que λ es el valor propio de A asociado a v.

Proposición 8.2. Sea A de $n \times n$. Si v_1 y v_2 son vectores propios asociados al valor propio λ, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αv_1 y $v_1 + v_2$ son vectores propios asociados a λ.

Proposición 8.3.

Proposición 8.4. Sea A de $n \times n$. λ es valor propio de A si y sólo si $|A - \lambda I| = 0$.

Definición 8.5. Sea A de $n \times n$. El polinomio característico de A es $p_A(x) = |A - xI|$.

Proposición 8.6. Sea A de $n \times n$. λ es valor propio de A si y sólo si λ es raíz de $p_A(x)$. La multiplicidad algebraica de λ es la multiplicidad como raíz de $p_A(x)$. (m.a.)

Proposición 8.7. Sea A de $n \times n$ y λ un valor propio de A. $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\}$ es el espacio propio asociado a λ. La dimensión de E_λ es la multiplicidad geométrica de λ.(m.g.). $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Teorema 8.8. Sea A de $n \times n$ y λ un valor propio de A. Entonces la m.g. de λ es menor o igual a la m.a. de λ.

Proposición 8.9. Sea A de $n \times n$. Entonces

- A tiene a lo más n valores propios.
- Si A es diagonal, entonces los valores propios de A son los elementos de su diagonal.
- Si A es triangular superior o inferior, entonces los valores propios de A son los elementos de su diagonal.
- A es no invertible si y sólo si 0 es valor propio de A.
- Si λ es valor propio de A, entonces λ^m es valor propio de A^m, para $m \in \mathbb{N}$.
- Si λ es valor propio de A y A es invertible, entonces λ^{-1} es valor propio de A^{-1}.
- Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios distintos de A, entonces $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\vec{0}\}$.
- La traza de A es la suma de sus valores propios.
- El determinante de A es el producto de sus valores propios.

Definición 8.10. Dado un polinomio $q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ y A matriz cuadrada, se define a $q(A)$ como la matriz $a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m$.

Teorema 8.11. Sea A matriz cuadrada. Entonces $p_A(A)$ es la matriz nula.

Definición 8.12. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. $v \neq \vec{0}$ es un vector propio de T si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Se dice que λ es el valor propio de T asociado a v.

Definición 8.13. Dos matrices cuadradas A y B se dicen similares si existe una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP = B$.

Proposición 8.14. Si A y B son similares, entonces tienen los mismos valores propios. Si P es tal que $P^{-1}AP = B$ y v es vector propio de B asociado a λ, entonces Pv es vector propio de A asociado a λ.

Definición 8.15. Una matriz cuadrada A (o transformación lineal T) es diagonalizable si y sólo si es similar a una matriz diagonal.

Proposición 8.16. Si A y B son similares, entonces A es diagonalizable si y sólo si B es diagonalizable.

Teorema 8.17. A es diagonalizable si y sólo si existen n vectores propios L.I. de A.

Corolario 8.18. Si A tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

Observación 8.19. Si A es diagonalizable, entonces A^m es diagonalizable, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Definición 8.20. P de $n \times n$ es ortogonal si $P^t P = I$.

Teorema 8.21. Sea P de $n \times n$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- P es ortogonal.
- $\|Px\| = \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- $Px \cdot Py = x \cdot y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es ortonormal, entonces $\{Pv_1, \ldots, Pv_m\}$ es ortonormal.

Observación 8.22. Si P y Q son ortogonales, entonces PQ es ortogonal.

Proposición 8.23. Sea A simétrica. Entonces

- A tiene sólo valores propios reales.
- Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios distintos de A tal que $v_1 \in E_{\lambda_1}$ y $v_2 \in E_{\lambda_2}$, entonces $v_1 \cdot v_2 = 0$.

Definición 8.24. Una matriz A se dice ortogonalmente diagonalizable si existe P ortogonal y D digonal, tal que $P^t AP = D$.

Teorema 8.25. A es simétrica si y sólo si A es ortogonalmente diagonalizable.

Corolario 8.26. A simétrica es positiva definida si y sólo si todos sus valores propios son positivos.

Definición 8.27. Si A es simétrica y $v_1, \ldots, v_n$ son vectores propios (ortonormales) asociados a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, entonces la descomposición espectral de A es:

$A = \lambda_1 v_1 v_1^t + \ldots + \lambda_n v_n v_n^t$.

Observación 8.28. Si $Av = \lambda v$, entonces $\lim_{k\to\infty} A^k v =$

- 0 si $|\lambda| < 1$,
- v si $\lambda = 1$,
- no existe si $|\lambda| > 1$.

Observación 8.29. Sea A es diagonalizable y $q(x)$ un polinomio. Entonces

- $A = P \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix} P^{-1} \to q(A) = P \begin{bmatrix} q(d_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(d_2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & q(d_n) \end{bmatrix} P^{-1}$
- $A = P \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix} P^{-1} \to e^A = P \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & e^{d_n} \end{bmatrix} P^{-1}$

Observación 8.30. Si A es de $n \times m$, se tiene que

1. $\mathrm{Ker}(A^t A) = \mathrm{Ker}(A)$.
2. $\mathrm{Im}(A^t A) = \mathrm{Im}(A^t)$.

Teorema 8.31. Sea A de $n \times m$. Entonces existen U de $m \times m$ y V de $n \times n$ matrices ortogonales tal que

$$V^t A U = \begin{bmatrix} s_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & s_r & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Observación 8.32. ¿Cómo obtener U?

La matriz A^tA es simétrica y semi definida positiva. Entonces existe U de $m \times m$ matriz ortogonal tal que

$$U^tA^tAU = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times m} \quad \text{con } d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_r > 0.$$

Sea U_1 matriz de $m \times r$ que contiene vectores propios de valores propios no nulos y U_2 matriz de $m \times (m-r)$ que contiene los vectores propios del valor propio 0. Entonces se tiene que:

- $U = [U_1\ U_2]$.
- Los vectores columna de U_1 forman una base de $\mathrm{Im}(A^tA) = \mathrm{Im}(A^t)$.
- Los vectores columna de U_2 forman una base de $\mathrm{Ker}(A^tA) = \mathrm{Ker}(A)$.
- $(AU_1)^t(AU_1) = D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r \end{bmatrix}_{n\times m}$

Observación 8.33. ¿Cómo obtener V?

Sea V_1 de $n \times r$ la matriz $V_1 = AU_1\sqrt{D}^{-1}$.

Sea V_2 de $n \times (n-r)$ la matriz cuyas columnas completan una base ortogonal con las columnas de V_1.

Entonces se considera $V = [V_1\ V_2]$.

Ejemplo 8.34. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Obterner la descomposición en valores singulares de A.

Solución:

$$A^tA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ con valores propios } \{4, 2, 0\}.$$

$$E_4 = < \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} >,\ E_2 = < \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} > \text{ y } E_0 = < \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} >.$$

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ con } U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ y } U_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \sqrt{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Entonces los valores singulares de A son: $\{2, \sqrt{2}\}$.

$$V_1 = AU_1\sqrt{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ y } V_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ y entonces } V^tAU = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.1. Problemas

1. Determine los valores y vectores propios de las siguientes matrices

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} -6 & -2 & -7 \\ 4 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} -5/2 & 1 & 3/2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

2. Demuestre que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es no singular, entonces los recíprocos de sus valores propios son valores propios de A^{-1}.

3. Sea A de $n \times n$ tal que $A^8 = 7A^7$. Pruebe que si 7 no es valor propio de A, entonces A es singular.

4. Sea U subespacio no trivial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m, P la matriz de proyección sobre U y $a \in \mathbb{N}$ mayor que uno. Determine los valores propios y la dimensión de los espacios propios de la matriz $I - aP$.

5. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Encuentre condiciones sobre los coeficientes de la matriz para que

   a) 0 sea un valor propio de A.

   b) A tenga un único valor propio.

   c) A sea diagonalizable.

6. Demuestre que la matriz $\begin{bmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a \end{bmatrix}$ es diagonalizable si y sólo si $|a| > 1$

7. Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$, demuestre que la matriz sólo admite los valores propios 0 y 1.

8. Sea A de 2×2, tal que no es diagonal, $tr(A) = 0$ y $|A| = d$, con $d \in \mathbb{R}$. Determine condiciones para que A sea diagonalizable.

9. Sea $T : P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ lineal tal que

$$T(x^k) = \sum_{i=0}^{k} (i+1)x^i \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

   Decida justificadamente si T es diagonalizable.

10. Sea A de 3×3 y e_1, e_2, e_3 vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} A(e_1 + e_2) &= e_3 \\ A(e_1 + e_3) &= e_2 \\ A(e_1) &= 3e_1 \end{aligned}$$

Encuentre y diagonalice A.

11. Sea A de 3×3 simétrica con valores propios $\lambda, \lambda+1, \lambda+2$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Muestre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que la matriz $A + aI$ es positiva definida.

12. Sea A simétrica de 5×5 y $B = [v_1\ v_2\ v_3]$ de 5×3 tal que

$$AB = B \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Muestre que B^tB es diagonal.

13. Sea V espacio vectorial de dimensión 3 tal que $V =< v_1, v_2, v_3 >$, y $T : V \to V$ lineal tal que $\text{Ker}(T) =< v_1 + v_2, v_1 + v_3 >$ y $\text{Im}(T) =< v_1 >$.

Decida justificadamente si T es diagonalizable.

14. Sea $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal dada por

$$T(A) = AE + EA \quad \text{para toda matriz } A \in M_2(\mathbb{R})$$

¿Es T diagonalizable? Justifique.

15. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que A es diagonalizable si y sólo si $A + aI$ es diagonalizable.

16. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A + 2I$. Pruebe que si 2 no es valor propio de A, entonces $A + I$ es singular.

17. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ Encuentre la descomposición espectral de A.

18. Calcule $\lim_{n\to\infty} A^n$, con $A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

19. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = 2A + 3I$. Demuestre que si 3 no es valor propio de A, entonces $A + I$ es no invertible.

Solución:

Se tiene que $A^2 - 2A - 3I = 0$, entonces $(A - 3I)(A + I) = 0$.

Tomando determinantes:

$|A - 3I| \cdot |A + I| = 0$.

Dado que 3 no es valor propio de A, entonces $|A - 3I| \neq 0$.

Por lo tanto $|A + I| = 0$ y entonces $A + I$ es no invertible.

20. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales tal que $5x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}$. Calcule el $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Solución:

Matricialmente queda

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 & -1/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 6/5 & -1/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}.$$

Polinomio característico de la matriz: $(x - 1/5)(x - 1)$.

Valores propios: $1/5, 1$.

$E_1 =< (1, 1)^t >$.

$E_{1/5} = (1,5)^t$.

$P^{-1}AP = D \to A = PDP^{-1} \to A^n = PD^nP^{-1}$.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$.

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} A^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 \\ 5/4 & -1/4 \end{bmatrix}$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{5x_1 - x_0}{4}$.

21. Sea A una matriz de 3×3 tal que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ y la forma escalonada reducida de A es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Calcule e^A.

Solución:

De la escalonada reducida $\text{Ker}(A) =< (0,1,0)^t, (1,0,1)^t >$.

Por lo tanto 0 es un valor propio de A con m.g. $= 2$.

Además $A(1,2,3)^t = 2(1,2,3)^t$.

Por lo tanto 2 es un valor propio de A con m.g. $= 1$. (no puede ser mayor pues la matriz es de 3×3).

La diagonalización queda:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

$A = PDP^{-1}$ entonces $e^A = Pe^DP^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3-e^2}{2} & 0 & \frac{e^2-1}{2} \\ 1-e^2 & 1 & e^2-1 \\ \frac{3-3e^2}{2} & 0 & \frac{3e^2-1}{2} \end{bmatrix}$.

22. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Determine la descomposición espectral de A.

Solución:

Valores propios: $3, 6$.

$E_3 =< (1,0,-1)^t, (0,1,-1)^t >$.

$E_6 =< (1,1,1)^t >$.

Bases ortonormales:

$E_3 =< (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^t, (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})^t >$.

$E_6 =< (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^t >$.

Entonces la descomposición queda:

$$A = 3\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1/6 & -2/6 & 1/6 \\ -2/6 & 4/6 & -2/6 \\ 1/6 & -2/6 & 1/6 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$