PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 28: Diagonalización

1. Sea $A = PDP^{-1}$ y calcule A^4

   a) $P = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. Use la factorización $A = PDP^{-1}$ para calcular A^k, donde k representa un entero positivo arbitrario

   a) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2(a-b) & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

3. La matriz A se factoriza en la forma PDP^{-1}. Utilice el teorema de diagonalización para encontrar los valores propios de A y una base para cada espacio propio.

   a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. Diagonalice las matrices, si es posible.

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$d)$ $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$e)$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$f)$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$g)$ $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. A es una matriz de 5×5 con dos valores propios. Un espacio propio es tridimensional y el otro espacio propio es bidimensional. ¿A es diagonalizable? ¿Por qué?

6. A es una matriz de 3×3 con dos valores propios. Cada espacio propio es unidimensional. ¿A es diagonalizable? ¿Por qué?

7. A es una matriz de 4×4 con tres valores propios. Un espacio propio es unidimensional, y uno de los otros espacios propios es bidimensional. ¿Es posible que A no sea diagonalizable? Justifique su respuesta.

8. A es una matriz de 7×7 con tres valores propios. Un espacio propio es bidimensional, y uno de los otros espacios propios es tridimensional. ¿Es posible que A no sea diagonalizable? Justifique su respuesta.

9. Demuestre que si A es diagonalizable e invertible, entonces también lo es A^{-1}.