Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2020

MAT1203 – Álgebra Lineal

Solución Interrogación N° 3

11. Sean $B_1 = \{1+x, 1-x, 1+x^2\}$ y B_2 bases de $\mathbb{P}_2$ tales que para todo $p \in \mathbb{P}_2$

Forma 1.
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [p]_{B_1} = [p]_{B_2} .$$

Forma 2.
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [p]_{B_1} = [p]_{B_2} .$$

Forma 3.
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [p]_{B_1} = [p]_{B_2} .$$

Forma 4.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} [p]_{B_1} = [p]_{B_2} .$$

Forma 5.
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} [p]_{B_1} = [p]_{B_2} .$$

Determine la base B_2.

Solución. Para determinar los elementos de la base B_2 debemos encontrar la matriz cambio de base de B_2 a B_1, para esto basta con encontrar la matriz inversa de la matriz dada, esto es

Forma 1.
$$A_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma 2.
$$A_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma 3.
$$A_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Forma 4.
$$A_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma 5.
$$A_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea $B_2 = \{q_1, q_2, q_3\}$. Tenemos que las columnas de $A_{B_2}^{B_1}$ corresponden a los vectores coordenadas de los elementos de B_2 en la base B_1. Entonces,

Forma 1.

$$\begin{aligned} q_1(x) &= -1\cdot(p_1(x)) + 0\cdot(p_2(x)) + 0\cdot(p_3(x)) = -1 - x \\ q_2(x) &= -2\cdot(p_1(x)) + 1\cdot(p_2(x)) + 1\cdot(p_3(x)) = -3x + x^2 \\ q_3(x) &= -2\cdot(p_1(x)) + 0\cdot(p_2(x)) + 1\cdot(p_3(x)) = -1 - 2x + x^2 \end{aligned}$$

Forma 2.

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 0\cdot(p_1(x)) + 1\cdot(p_2(x)) + 1\cdot(p_3(x)) = 2 - x + x^2 \\ q_2(x) &= -1\cdot(p_1(x)) - 1\cdot(p_2(x)) - 1\cdot(p_3(x)) = -3 - x^2 \\ q_3(x) &= 0\cdot(p_1(x)) - 1\cdot(p_2(x)) + 0\cdot(p_3(x)) = -1 + x \end{aligned}$$

Forma 3.

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 1\cdot(p_1(x)) - 1\cdot(p_2(x)) - 1\cdot(p_3(x)) = -1 + 2x - x^2 \\ q_2(x) &= -2\cdot(p_1(x)) + 1\cdot(p_2(x)) + 1\cdot(p_3(x)) = -3x + x^2 \\ q_3(x) &= 2\cdot(p_1(x)) - 2\cdot(p_2(x)) - 1\cdot(p_3(x)) = -1 + 4x - x^2 \end{aligned}$$

Forma 4.

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 0\cdot(p_1(x)) - 1\cdot(p_2(x)) + 1\cdot(p_3(x)) = x + x^2 \\ q_2(x) &= 1\cdot(p_1(x)) + 1\cdot(p_2(x)) - 1\cdot(p_3(x)) = 1 - x^2 \\ q_3(x) &= 0\cdot(p_1(x)) + 1\cdot(p_2(x)) + 0\cdot(p_3(x)) = 1 - x \end{aligned}$$

Forma 5.

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 0\cdot(p_1(x)) - 1\cdot(p_2(x)) + 1\cdot(p_3(x)) = x + x^2 \\ q_2(x) &= 1\cdot(p_1(x)) + 2\cdot(p_2(x)) - 2\cdot(p_3(x)) = 1 - x - 2x^2 \\ q_3(x) &= 0\cdot(p_1(x)) + \frac{1}{2}\cdot(p_2(x)) + 0\cdot(p_3(x)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 11.

- 3 puntos por obtener $A_{B_2}^{B_1}$ (o 1 punto por cada columna, si las obtiene por separado).
- 3 puntos por obtener explítamente la base B_2.

12. *a*) Suponga que las siguientes matrices son cuadradas del mismo tamaño. Sea P una matriz invertible, D una matriz diagonal, $A = PDP^{-1}$ y $B = A^2 + cA + dI$ donde I es la matriz identidad. Demuestre que B es diagonalizable.

Forma 1. $c = 4$ y $d = -1$ **Forma** 3. $c = 2$ y $d = -3$ **Forma** 5. $c = -4$ y $d = 1$
Forma 2. $c = 3$ y $d = -2$ **Forma** 4. $c = -3$ y $d = 2$

b) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = (c-1)A + cI$. Pruebe que si c no es valor propio de A, entonces $\det(A + I) = 0$.

Forma 1. $c = 4$ **Forma** 3. $c = 2$ **Forma** 5. $c = -4$
Forma 2. $c = 3$ **Forma** 4. $c = -3$

Solución.

a) En efecto, como $A = PDP^{-1}$ entonces

$$B = A^2 + cA + dI = PD^2P^{-1} + cPDP^{-1} + dPP^{-1} = P(D^2 + cD + dI)P^{-1} = PD_BP^{-1}\,.$$

La matriz $D_B = D^2 + cD + dI$ es diagonal, luego la matriz B es diagonalizable.

b) Notemos que

$$A^2 = (c-1)A + cI \iff A^2 + (1-c)A - cI = 0 \iff (A - cI)(A + I) = 0$$

Entonces, como c no es valor propio de A se cumple que $|A - cI| \neq 0$ y obtenemos

$$0 = |(A - cI)(A + I)| = |A - cI| \cdot |A + I|$$

entonces $|A + I| = 0$.

Puntaje Pregunta 12.

- 3 puntos por mostrar que B es diagonalizable.
- 3 puntos por obtener que $\det(A + I) = 0$.

13. Sea A una matriz de 3×3 y e_1, e_2, e_3 los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ tal que

Forma 1.

$$\begin{aligned} A(e_1+e_2) &= 2e_3 \\ A(e_1+e_3) &= 2e_2 \\ A(e_1) &= e_1 \end{aligned}$$

Forma 2.

$$\begin{aligned} A(e_1+e_2) &= -2e_3 \\ A(e_1+e_3) &= -2e_2 \\ A(e_1) &= 3e_1 \end{aligned}$$

Forma 3.

$$\begin{aligned} A(e_1+e_2) &= 2e_3 \\ A(e_1+e_3) &= 2e_2 \\ A(e_1) &= -3e_1 \end{aligned}$$

Forma 4.

$$\begin{aligned} A(e_1+e_2) &= -e_3 \\ A(e_1+e_3) &= -e_2 \\ A(e_1) &= -2e_1 \end{aligned}$$

Forma 5.

$$\begin{aligned} A(e_1+e_2) &= 2e_3 \\ A(e_1+e_3) &= 2e_2 \\ A(e_1) &= 4e_1 \end{aligned}$$

a) Encuentre A.

b) Justifique si A es diagonalizable o no y hágalo de ser posible.

Solución. Sean a y b constante reales no nulas con $|a| \neq |b|$. Considere el problema general

$$\begin{aligned} A(e_1+e_2) &= be_3 \\ A(e_1+e_3) &= be_2 \\ A(e_1) &= ae_1 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema vemos que $A(e_1) = ae_1$, $A(e_2) = -ae_1 + be_3$ y $A(e_3) = -ae_1 + be_2$. Entonces la matriz A está dada por

$$A = AI = A[e_1 \ e_2 \ e_3] = [ae_1 \ \ -ae_1 + b_e \ \ -ae_1 + be_2] = \begin{bmatrix} a & -a & -a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} .$$

Los valores propios de A satisfacen

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & -a & -a \\ 0 & -\lambda & b \\ 0 & b & -\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(\lambda^2 - b^2) = (a-\lambda)(\lambda - b)(\lambda + b) .$$

por lo que los valores propios de A son $\lambda_1 = -b$, $\lambda_2 = a$, $\lambda_3 = b$. Los espacios propios son

$$E_{\lambda_1} = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} , \qquad E_{\lambda_2} = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad E_{\lambda_3} = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2a}{a-b} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Se tiene que $A = PDP^{-1}$ donde:

Forma 1. La matriz invertible $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Forma 2. La matriz invertible $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Forma 3. La matriz invertible $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Forma 4. La matriz invertible $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Forma 5. La matriz invertible $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Puntaje Pregunta 13.

- 2 puntos por hallar la matriz A.
- 1 punto por obtener los valores propios de A.
- 2 puntos por hallar los espacios propios de A.
- 1 punto por definir correctamente las matrices P y D.