Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2025

Álgebra Lineal - MAT1203
Ayudantía 11

1. Sea $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ por $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(-2) \\ \mathbf{p}(3) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(0) \end{bmatrix}$

   (a) Demuestre que T es una transformación lineal.

   (b) Encuentre la matriz para T respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$ para $\mathbb{P}_3$ y la base estándar para $\mathbb{R}^4$.

Solución.

(a) Para demostrar que T es lineal, procederemos en dos pasos:

1) Aditividad: Mostrar que para cualesquiera dos polinomios $p_1(t), p_2(t) \in P_3$,

$$T\big(p_1 + p_2\big) \;=\; T(p_1) \;+\; T(p_2).$$

Sean

$$p_1(t),\, p_2(t) \in P_3.$$

Por definición de T:

$$T\big(p_1 + p_2\big) \;=\; \begin{bmatrix} \big(p_1 + p_2\big)(-2) \\ \big(p_1 + p_2\big)(3) \\ \big(p_1 + p_2\big)(1) \\ \big(p_1 + p_2\big)(0) \end{bmatrix}.$$

Pero $\big(p_1 + p_2\big)(x) = p_1(x) + p_2(x)$ para todo x. Entonces:

$$T\big(p_1{+}p_2\big) = \begin{bmatrix} p_1(-2) + p_2(-2) \\ p_1(3) + p_2(3) \\ p_1(1) + p_2(1) \\ p_1(0) + p_2(0) \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} p_1(-2) \\ p_1(3) \\ p_1(1) \\ p_1(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2(-2) \\ p_2(3) \\ p_2(1) \\ p_2(0) \end{bmatrix} \;=\; T(p_1) + T(p_2).$$

Por lo tanto, $T(p_1 + p_2) = T(p_1) + T(p_2)$.

2) Homogeneidad: Mostrar que para cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y cualquier polinomio $p(t) \in P_3$,

$$T\big(\alpha\, p\big) \;=\; \alpha\, T(p).$$

Sea

$$p(t) \in P_3, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Entonces, por la definición de T:

$$T\big(\alpha\, p\big) = \begin{bmatrix} \big(\alpha\, p\big)(-2) \\ \big(\alpha\, p\big)(3) \\ \big(\alpha\, p\big)(1) \\ \big(\alpha\, p\big)(0) \end{bmatrix}.$$

Pero $\big(\alpha\, p\big)(x) = \alpha\, p(x)$. Luego:

$$T\big(\alpha\, p\big) = \begin{bmatrix} \alpha\, p(-2) \\ \alpha\, p(3) \\ \alpha\, p(1) \\ \alpha\, p(0) \end{bmatrix} \;=\; \alpha \begin{bmatrix} p(-2) \\ p(3) \\ p(1) \\ p(0) \end{bmatrix} \;=\; \alpha\, T(p).$$

Por lo tanto, $T(\alpha\, p) = \alpha\, T(p)$.

En consecuencia, T verifica aditividad y homogeneidad, y por ende es una transformación lineal.

(b) En lo que sigue construiremos la matriz

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{E}} \;=\; \big[\, [T(1)]_{\mathcal{E}} \;\; [T(t)]_{\mathcal{E}} \;\; [T(t^2)]_{\mathcal{E}} \;\; [T(t^3)]_{\mathcal{E}} \big],$$

donde $\mathcal{B} = \{\, 1,\, t,\, t^2,\, t^3\}$ es la base de P_3 y $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^4$. Cada columna de esta matriz se obtiene aplicando T a un elemento de $\mathcal{B}$ y escribiendo el resultado en coordenadas estándar. Sea un polinomio arbitrario

$$p(t) \;=\; a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} p(-2) &= a_0 + a_1(-2) + a_2(-2)^2 + a_3(-2)^3 = a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3, \\ p(3) &= a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 + a_3(3)^3 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3, \\ p(1) &= a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 + a_3(1)^3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \\ p(0) &= a_0. \end{aligned}$$

De este modo,

$$T\big(a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3\big) \;=\; \begin{bmatrix} a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ a_0 \end{bmatrix}.$$

Ahora, para construir la matriz, aplicamos T a cada vector de la base $\mathcal{B}$:

- Para 1 ($a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$):

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Para t ($a_1 = 1$, $a_0 = a_2 = a_3 = 0$):

$$T(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Para t^2 ($a_2 = 1$, $a_0 = a_1 = a_3 = 0$):

$$T(t^2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Para t^3 ($a_3 = 1$, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$):

$$T(t^3) = \begin{bmatrix} -8 \\ 27 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz de T en la base $\mathcal{B}$ de P_3 y la base estándar de $\mathbb{R}^4$ es

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{E}} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de 3×3 con valores propios de 1 ,5 y -2. ¿Existe una base $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^3$ tal que la $\mathcal{B}$-matriz para T (es decir, representación matricial con respecto de la base $\mathcal{B}$) sea una matriz diagonal?

Solución. Por el *Teorema de Diagonalización* : si una matriz $A \in M_{n\times n}$ tiene n valores propios (no necesariamente distintos) y el espacio propio para cada valor propio λ_i tiene dimensión igual a la multiplicidad algebraica de λ_i, entonces existe una matriz invertible P tal que

$$A \;=\; P\,D\,P^{-1},$$

donde D es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores propios de A. Además, la lista de vectores propios que forman las columnas de P constituye una base $\mathcal{B}$ en la que la $\mathcal{B}$-matriz de la transformación lineal $T(x) = A\,x$ coincide con D.

En nuestro caso, los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = -2,$$

y todos ellos son distintos. Por teorema, los espacios propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes. Por tanto:

1) Para cada $\lambda_i \in \{1, 5, -2\}$ existe un vector propio $v_i \neq 0$ tal que

$$A\,v_i \;=\; \lambda_i\,v_i.$$

Como $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son distintos, los vectores v_1, v_2, v_3 pertenecientes a sus respectivos espacios propios son linealmente independientes. En consecuencia, $\{\,v_1,\, v_2,\, v_3\}$ es un conjunto de tres vectores en $\mathbb{R}^3$ que forma una base.

2) Definamos

$$\mathcal{B} \;=\; \{\,v_1,\, v_2,\, v_3\}.$$

Construimos la matriz $P = [\,v_1 \;\; v_2 \;\; v_3\,]$. Como los v_i son linealmente independientes, P es invertible. Entonces, por el Teorema de Diagonalización,

$$A \;=\; P\,D\,P^{-1}, \quad \text{donde} \quad D \;=\; \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Por construcción, la base $\mathcal{B}$ diagonaliza a A, es decir, la $\mathcal{B}$-matriz de T es precisamente D.

En resumen, como A tiene tres valores propios distintos, se cumple la hipótesis del Teorema de Diagonalización . Por ello, existe una base $\mathcal{B} = \{\,v_1,\, v_2,\, v_3\}$ formada por vectores propios asociados a $1, 5, -2$, de modo que

$$[T]_{\mathcal{B}} \;=\; D \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Así, la respuesta es afirmativa: sí existe una base $\mathcal{B}$ en la que la $\mathcal{B}$-matriz de T es diagonal.

3. Determine el ángulo φ de la rotación, donde $-\pi < \varphi \leq \pi$, así como el factor de escalamiento r de la acción de la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Solución. Observemos que una matriz real de 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

actúa sobre $\mathbb{R}^2$ exactamente como la multiplicación por el número complejo $a+bi$. En dicho caso:

- El factor de escala (norma) es

$$r \;=\; \big|\, a+bi \big| \;=\; \sqrt{a^2+b^2}.$$

- El ángulo de rotación φ (argumento) satisface

$$a+bi \;=\; r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

En nuestro problema,

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

se puede reescribir en la forma

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a=0,\ -b=2,$$

de modo que $b=-2$. Por tanto, el número complejo asociado es

$$a+bi \;=\; 0 \;+\; (-2)\,i \;=\; -\,2\,i.$$

A partir de ahí:

- **Factor de escalamiento r.** Su magnitud es

$$r \;=\; \big|\, -2\,i \big| \;=\; 2.$$

- **Ángulo de rotación φ.** Como $-2\,i = 2\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$, debemos encontrar φ tal que

$$\cos\varphi = 0, \qquad \sin\varphi = -1, \qquad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

  La única solución en ese intervalo es $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

En consecuencia, la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ actúa sobre $\mathbb{R}^2$ como la composición de un escalamiento de factor $r=2$ seguido de una rotación de ángulo $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

4. Encuentre una matriz P invertible y una matriz C de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ tal que $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = PCP^{-1}$.

Solución. Según el Teorema 9, si $\lambda = a - bi$ (con $b \neq 0$) es un valor propio de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ con vector propio complejo $v \in \mathbb{C}^2$, entonces

$$A \;=\; P\,C\,P^{-1}, \quad P = \big[\,Re(v)\;\; Im(v)\big], \quad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Por tanto, basta hallar un valor propio $\lambda = a - bi$ y su vector propio v, y luego tomar las partes real e imaginaria de v como columnas de P.

1. Valores propios de A. El polinomio característico de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es

$$\det(A - \lambda I) \;=\; \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \;=\; (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 \;=\; \lambda^2 - 4\lambda + 5.$$

Las raíces de $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ son

$$\lambda = 2 \pm i.$$

Para satisfacer el formato $\lambda = a - bi$, seleccionamos $\lambda = 2 - i$. De aquí se obtiene

$$a = 2, \qquad b = 1,$$

y la matriz C queda

$$C \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Cálculo del vector propio para $\lambda = 2 - i$. Resolvemos

$$\big(A - (2-i)\, I\big)\, v \;=\; 0.$$

Escribimos

$$A - (2-i)\, I \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - (2-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1-(2-i) & -2 \\ 1 & 3-(2-i) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Sea $v = \begin{bmatrix} x;\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$. De la primera ecuación,

$$(-1+i)\, x \;-\; 2\, y \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; y \;=\; \frac{-1+i}{2}\, x.$$

Para simplificar tomamos $x = 1$. Entonces

$$y \;=\; \frac{-1+i}{2},$$

y un vector propio es

$$v \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Separación en $\mathrm{Re}(v)$ y $\mathrm{Im}(v)$. Escribimos

$$v \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\mathrm{Re}(v)} + i\, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\mathrm{Im}(v)}.$$

Definimos dos vectores reales

$$p_1 \;=\; \mathrm{Re}(v) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad p_2 \;=\; \mathrm{Im}(v) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Entonces formamos

$$P \;=\; \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Como $\det(P) = 1 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \neq 0$, la matriz P es invertible.

Respuesta final. Una elección adecuada es

$$P \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad C \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

donde $\det(P) = \frac{1}{2} \neq 0$ y se verifica $A = P\,C\,P^{-1}$.