PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Solución Ayudantía 3 - MAT1203

Solución P1

a) Los vectores canónicos e_i de la expresión $M(2e_1 - e_3 + e_4) = 0$ pertenecen a $\mathbb{R}^4$. Esto se debe a que, para obtener un vector, es decir, un elemento de solo una columna, la matriz M que es de 7x4 se debe multiplicar por un vector de 4 entradas, así se obtiene como resultado otro vector, pero de 7 entradas.

b) v_4 es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 ya que, por enunciado, y considerando que que, en $\mathbb{R}^4$, $2e_1 - e_3 + e_4$ corresponde al vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sabemos que:

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Luego, desarrollando la multiplicación de la matriz por el vector, obtenemos:

$$2v_1 - v_3 + v_4 = \vec{0}$$
$$v_4 = v_3 - 2v_1$$

Así, demostramos que v_4 es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

c) Debido a que la matriz M tiene columnas linealmente dependientes, podemos decir que $Mx = 0$ tiene infinitas soluciones debido a la presencia de una variable libre en el sistema, la cual puede tomar infinitos valores.

d) Sabemos que M tiene 7 filas, pero solo 4 columnas, y por lo tanto 4 incógnitas, de las cuales mínimo una es libre. Por esto, tiene máximo 3 filas linealmente independientes, lo que corresponde a un mínimo de 4 filas nulas.

e) Por el ítem b) sabemos que $v_4 = v_3 - 2v_1$, por lo que $v_3 = 2v_1 + v_4$, así, sabemos que el sistema: $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_4 & | & v_3 \end{bmatrix}$ tiene solución $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Solución P2

Para saber encontrar el valor de h que hace que los vectores sean linealmente dependientes, debemos encontrar el que haga que el sistema Mx = 0, con M la matriz de los vectores mencionados, tenga una solución distinta a la trivial, es decir, tenga una variable libre (fila de 0s).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & h & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 + F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & h & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 - 2 \cdot F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & h+4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - \frac{1}{2} \cdot F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h+4 & 0 \end{array}\right]$$

Luego, como necesitamos que la última fila sea nula, obtenemos que:

$$h + 4 = 0$$
$$h = -4$$

Solución P3

a) El dominio de T es $\mathbb{R}^4$, debido que la matriz A tiene 4 columnas, y el codominio es $\mathbb{R}^3$, ya que tiene 3 filas. Esto significa que las x que recibe la transformación serán vectores en 4 dimensiones, y esta retornará vectores en 3 dimensiones.

b) T es una transformación lineal ya que cumple ambas condiciones de la definición

$$T(u+v) = A \cdot (u+v) = A \cdot u + A \cdot v = T(u) + T(v)$$
$$T(cu) = A \cdot (cu) = c \cdot A \cdot u = c \cdot T(u)$$

c) Buscamos todos los valores de x tal que $Ax = 0$. Para esto, armamos la matriz ampliada del problema y la reducimos.

$$\xrightarrow{F_3 - 2 \cdot F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - 2 \cdot F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 - 2 \cdot F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

De la última fila obtenemos que $x_4 = 0$. Luego, reemplazando en la segunda, tenemos que $x_2 - 3x_3 = 0$, es decir $x_2 = 3x_3$. Por último, reemplazando ambas en la fila uno, tenemos que $x_1 - 4x_3 = 0$, es decir, $x_1 = 4x_3$. Así, con x_3 variable libre, tenemos la solución buscada:

$$x = x_3 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Para saber si el vector b pertenece al rango, debemos ver si existe x tal que Ax = b. Para esto, armamos la matriz ampliada del problema y la reducimos.

$$\xrightarrow{F_3 - 2 \cdot F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - 2 \cdot F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 - 2 \cdot F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Como la matriz es consistente, si existe dicha x y el vector b pertenece al rango de la transformación.

Solución P4

Por el enunciado, sabemos que:

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$T(e_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Luego, por la definición de transformación lineal, podemos decir que:

$$T(\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}) + T(\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = 5T(e_1) - 3T(e_2) = \begin{bmatrix} 10 + 3 \\ 25 - 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Y generalizando, sabemos que:

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}$$

Solución P5

a) Falso. Un sistema que tiene más variables que ecuaciones no necesariamente tiene infinitas soluciones, ya que puede ser inconsistente. Un contrajemplo a la afirmación sería el siguiente sistema:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

Ya que desarrollandolo se obtiene una fila del tipo $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right]$.

b) Falso. Un sistema que tiene más ecuaciones que variables no necesariamente es inconsistente, ya que algunas de sus ecuaciones pueden ser LD. Un contraejemplo podría ser:

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 2x_2 = 6$$
$$x_1 = 3$$

El cual tiene solución $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, por lo que es consistente.

c) Verdadero. Si la ecuación Ax = 0 solo se cumple con la solución trivial, necesariamente las columnas de la matriz deben ser LI, ya que en caso contrario habría una variable libre y la ecuación tendría infinitas soluciones. El que solo exista la solución trivial nos dice que no existe una combinación lineal de las columnas que de 0, por lo que deben ser LI.

d) Falso. Para que el conjunto sea linealmente dependiente, algún vector debe ser combinación lineal de los demás, no todos. Un contrajemplo podría ser:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es LD ya que $2v_1 - v_2 = 0$, pero v_3 no es combinación lineal de los otros vectores.

e) Verdadero. Esta matriz tiene 5 columnas, las cuales son vectores en $\mathbb{R}^4$. En este espacio, cualquier conjunto de más de 4 vectores es linealmente dependiente porque tiene dimensión 4, así que no pueden existir 5 vectores linealmente independientes.