Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2022

Álgebra Lineal - MAT1203
Guía 14

Problemas mínimos

1. Considere los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   Escriba $\mathbf{v}$ como la suma de dos vectores, uno en Gen $\{\mathbf{u}_1\}$ y el otro en Gen $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$.

2. Sean $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encuentre la distancia de $\mathbf{y}$ al plano en $\mathbb{R}^3$ generado por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.

3. Sean $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ $W = \text{Gen}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

   - Sea $U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$. Calcule $U^T U$ y UU^T.
   - Calcule $\text{proy}_W \mathbf{y}$ $\left(UU^T\right)\mathbf{y}$

4. Determine una base ortonormal para el espacio columna de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Luego, determine la factorización QR de la matriz.

Problemas adicionales

5. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y si $\mathbf{v}$ está en W y en $W^{\perp}$, entonces $\mathbf{v}$ debe ser el vector cero.

   (b) Si $\mathbf{y} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$, donde $\mathbf{z}_1$ está en un subespacio W y $\mathbf{z}_2$ está en $W^{\perp}$, entonces $\mathbf{z}_1$ debe ser la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre W.

   (c) La mejor aproximación de $\mathbf{y}$ por elementos de un subespacio W está dada por el vector $\mathbf{y} -$ proy $_W\mathbf{y}$.

   (d) Si una matriz U de $n \times p$, tiene columnas ortonormales, entonces $UU^T\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$.

   (e) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base ortogonal para W, entonces la multiplicación de $\mathbf{v}_3$ por un escalar c da una nueva base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, c\mathbf{v}_3\}$.

   (f) El proceso de Gram-Schmidt aplicado a un conjunto linealmente independiente $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ produce un conjunto ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ con la propiedad de que para cada k, los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ generan el mismo subespacio que se originó por $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$.

   (g) Si $A = QR$, donde Q tiene columnas ortonormales, entonces $R = Q^T A$.