PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Ayudantía 3 - MAT1203

1. Sean $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$, vectores de $\mathbb{R}^7$ y considere la matriz $M = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]$.
   Si $M(2e_1 - e_3 + e_4) = 0$:

   a) ¿A qué conjunto pertenecen los vectores canónicos e_i de la expresión anterior?

   b) Demuestre que v_4 es combinación lineal de los vectores $v_1,\ v_2$ y v_3.

   c) ¿Cuántas soluciones tiene el SEL homogéneo $Mx = 0$?

   d) ¿Cuál es el mínimo número de filas nulas que tiene la forma escalonada de M?

   e) Demuestre que el SEL cuya matriz ampliada es $[v_1\ v_2\ v_4|v_3]$ es consistente. Determine una solución.

2. Encuentre el valor de h que hace a los siguientes vectores linealmente dependientes:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ h \end{bmatrix}$$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ y defina la transformación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

   a) Determine el dominio y el codominio de T.

   b) ¿Porqué T es una transformación lineal?

   c) Encuentre todos los vectores x de $\mathbb{R}^4$ que son transformados en el vector nulo por la transformación T.

   d) ¿El vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertenece al rango (recorrido) de la transformación lineal T? Jusitifique.

4. Sean $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que mapea $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{y}_1$, y $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{y}_2$. Encuentre las imágenes de $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

5. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta. Verdadero significa que siempre se cumple y debe demostrarlo para un caso general. Falso es que hay al menos 1 contraejemplo a dicha afirmación y debe mostrarlo explícitamente.

   a) Si un sistema de ecuaciones tiene más variables que ecuaciones, entonces siempre tiene infinitas soluciones.

   b) Si un sistema de ecuaciones tiene más ecuaciones que variables, entonces siempre es inconsistente.

   c) Las columnas de una matriz A son linealmente independientes si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene la solución trivial.

   d) Si S es un conjunto linealmente dependiente, entonces cada vector es una combinación lineal de los otros vectores en S.

   e) Las columnas de cualquier matriz de 4×5 son linealmente dependientes.