PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 19: Espacios y subespacios vectoriales

1. Determine si el conjunto dado es un subespacio de $\mathbb{P}_n$ para un valor adecuado de n. Justifique sus respuestas.

   a) Todos loos polinomios de la forma $\mathbf{p}(t) = at^2$, donde a se encuentra en $\mathbb{R}$.

   b) Todos los polinomios de la forma $\mathbf{p}(t) = a + t^2$, donde a se encuentra en $\mathbb{R}$.

   c) Todos los polinomios de grado 3 como máximo, con números enteros como coeficientes.

   d) Todos los polinomios en $\mathbb{P}_n$ tales que $\mathbf{p}(0) = 0$.

2. Sea H el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} -2t \\ 5t \\ 3t \end{bmatrix}$. Encuentre un vector $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $H = \text{Gen}\{\mathbf{v}\}$. ¿Por qué esto demuestra que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

3. Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} 2b + 3c \\ -b \\ 2c \end{bmatrix}$, donde b y c son arbitrarios. Encuentre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tales que $W = \text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. ¿Por qué esto demuestra que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

4. Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} 2s + 4t \\ 2s \\ 2s - 3t \\ 5t \end{bmatrix}$, donde s y t son números reales. Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

5. Sea W el conjunto de los vectores de la forma indicada, donde a, b y c representan números reales arbitrarios. En cada caso, encuentre un conjunto S de vectores que genere W o dé un ejemplo para demostrar que W no es un espacio vectorial.

   a) $\begin{bmatrix} 2a + 3b \\ -1 \\ 2a - 5b \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3a-5b \\ 3b+2a \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2a-b \\ 3b-c \\ 3c-a \\ 3b \end{bmatrix}$

6. Determine si el conjunto H de todas las matrices de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ es un subespacio de las matrices de 2×2.

7. Sea F una matriz fija de 3×2 y sea H el conjunto de todas las matrices A en $M_{2\times 4}$ con la propiedad de que $FA = \mathbf{0}$ (la matriz cero en $M_{3\times 4}$). Determine si H es un subespacio de $M_{2\times 4}$.