PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Interrogación 1 MAT1203 - 13 de abril

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera, demuéstrela. Si es falsa dé un contraejemplo.

1. *a)* Si $u, v \in \mathbb{R}^2$, entonces $|u \cdot v| > \|u\|\|v\|$.

   Solución:

   Falso.

   Basta tomar $u = e_1$ y $v = e_2$, entonces: $u \cdot v = 0$, $\|u\| = 1$ y $\|v\| = 1$. Luego $0 > 1$ no es cierto.

   b) Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. $\text{Gen}\{u + v, u + 2v\} = \text{Gen}\{u + 3v, u + 4v\}$.

   Solución:

   Verdadero.

   Para probar $\text{Gen}\{u + v, u + 2v\} \subseteq \text{Gen}\{u + 3v, u + 4v\}$:

   Se prueba que $u + v \in \text{Gen}\{u + 3v, u + 4v\}$ y $u + 2v \in \text{Gen}\{u + 3v, u + 4v\}$.

   En efecto $u + v = 3(u + 3v) - 2(u + 4v)$ y $u + 2v = 2(u + 3v) - (u + 4v)$.

   Para probar $\text{Gen}\{u + 3v, u + 4v\} \subseteq \text{Gen}\{u + v, u + 2v\}$:

   Se prueba que $u + 3v \in \text{Gen}\{u + v, u + 2v\}$ y $u + 4v \in \text{Gen}\{u + v, u + 2v\}$.

   En efecto $u + 3v = -(u + v) + 2(u + 2v)$ y $u + 4v = -2(u + v) + 3(u + 2v)$.

2. *a*) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. El sistema $Ax = \vec{0}$ tiene solución única $x = \vec{0}$.

Solución:

Verdadero.

Sea $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, entonces

$x_1 + 2x_2 = 0$, $x_1 + 3x_2 = 0$ y $x_1 = 0$, luego $x_1 = x_2 = 0$.

b) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $u, v \in \mathbb{R}^2$.
Si $\{u, v\}$ es linealmente independiente, entonces $\{Au, Av\}$ es linealmente independiente.

Solución:

Verdadero.

Sean α y β tales que $\alpha(Au) + \beta(Av) = \vec{0}$.

Se debe probar que $\alpha = \beta = 0$.

Se tiene que $\alpha(Au) + \beta(Av) = A(\alpha u + \beta v)$.

Si $A(\alpha u + \beta v) = \vec{0}$ se tiene que $\alpha u + \beta v = \vec{0}$, pues:

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $Ax = \vec{0}$, entonces

$x_1 + 2x_2 = 0$, $x_1 + 3x_2 = 0$ y $x_1 = 0$, luego $x_1 = x_2 = 0$.

Se concluye entonces que $\alpha u + \beta v = \vec{0}$, pero el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente independiente, entonces $\alpha = \beta = 0$.

3. *a*) La recta $L = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ está contenida en el plano de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Solución:

Falso.

Si $x \in L$, entonces $x = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -1 \\ 1+\alpha \end{pmatrix}$.

Para que L esté contenida en el plano debe cumplirse que para todo α:
$(1+\alpha) + (-1) + (1+\alpha) = 1$.

Pero $1 + 2\alpha = 1$ solo cuando $\alpha = 0$, por lo tanto no se cumple.

Nota: También es posible mostrar que hay un punto en L que no pertenece al plano.

b) El sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= a \end{aligned}$$

es inconsistente, independiente del valor de $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

Falso.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+1/2 \end{array}\right].$$

Entonces el sistema es inconsistente sólo cuando $a \neq -1/2$.

Nota: También es posible mostrar un contraejemplo para algún $a \neq -1/2$.

4. *a*) Si A es una matriz de 4×3 tal que el sistema $Ax = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones, entonces la forma escalonada reducida de la matriz A tiene a lo más dos pivotes.

Solución:

Verdadero.

Si el sistema tiene infinitas soluciones, entonces la forma escalonada reducida de A debe tener al menos una variable libre.

Por otro lado el máximo número de pivotes de la forma escalonada reducida de A, por tamaño, es 3.

Como el número de columnas es 3, entonces el número máximo de pivotes es $3 - 1 = 2$.

b) Si $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces existe x tal que $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

Verdadero.
Primero se busca α y β tales que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Resolviendo se obtiene $\alpha = -1$ y $\beta = 2$, entonces:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Reemplazando se tiene:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1)A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (2)A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Luego $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = A \left((-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto basta tomar $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.