Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2019

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Interrogación 1

1. Sea Π el plano con vectores directores $d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $d_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y L la recta con dirección $d = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ que pasa por el punto $Q = (a, b, 0)$, donde a, b son constantes reales. Determine los valores de a y b de manera que L esté contenida en Π.

   Solución.

   - 1° solución
     Para que L esté contenida en Π, su dirección debe poder generarse con los directores del plano, esto es que d sea una combinación lineal de d_1 y d_2.

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 \end{array}\right]$$

     De aquí obtenemos que $b = -1$.
     Además el punto Q debe estar en el plano, es decir, el vector

$$\begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}] \leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & a-1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-3 \end{array}\right].$$

     De acá concluímos que $a = 3$.

     Puntaje:

     - 3 ptos por obtener que $b = -1$ (1 pto si argumenta de manera correcta y no llega al valor correcto)
     - 3 ptos por obtener que $a = 3$ (1 pto si argumenta de manera correcta y no llega al valor correcto)

- 2° solución

  Para que L esté contenida en Π, se necesita que para todo $\gamma \in \mathbb{R}$ exista $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-a-\gamma \\ 1-b-b\gamma \\ 1-\gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -0 & 1-a-\gamma \\ 1 & 0 & 1-b-b\gamma \\ 2 & 1 & 1-\gamma \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1-a-\gamma \\ 0 & 0 & 2-a-b-b\gamma-\gamma \\ 0 & 1 & 1-3\gamma+2+2a \end{array}\right)$$

  Luego como el sistema debe tener solución se necesita que $2-a-b=(1+b)\gamma$ entonces

$$1+b=0 \to b=-1$$

$$2-a-b=0 \to a=3$$

Puntaje:

- 3 ptos por obtener que $b=-1$ (1 pto si argumenta de manera correcta y no llega al valor correcto)
- 3 ptos por obtener que $a=3$ (1 pto si argumenta de manera correcta y no llega al valor correcto)

2. Demuestre que si $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 - v_3\}$ es un conjunto linealmente independiente entonces el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ también es linealmente independiente.

Solución.

Suponga que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$, queremos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Observe que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (\alpha - \beta + \gamma)v_1 + \beta(v_2 + v_1) - \gamma(v_1 - v_3)$$

como $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 - v_3\}$ es un conjunto linealmente independiente tenemos que

$$\alpha - \beta + \gamma = \beta = \gamma = 0$$

obteniendo que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Puntaje:

- 1 pto por decir que debe demostrar que si $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ entonces $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
- 2 ptos por determinar los ponderados de la combinación lineal de v_1, v_2, v_3 en función de α, β, γ.
- 2 ptos por justificar que estos ponderadores deben ser 0.
- 1 pto por justificar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

3. Sea A una matriz de 3×3 y $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ vectores linealmente independientes, tal que

$$Av_1 = v_2, \quad Av_2 = v_1, \quad Av_3 = v_1 + v_2.$$

a) Determine una matriz B tal que $AB = [v_1 \quad v_2 \quad \vec{0}]$.

b) ¿ Las columnas de A generan $\mathbb{R}^3$? Justifique su respuesta.

Solución.

a) Sea $B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$. Como

- $AB = [Ab_1 \quad Ab_2 \quad Ab_3] = [v_1 \quad v_2 \quad \vec{0}]$
- $Av_1 = v_2$ podemos tomar a $b_2 = v_1$
- $Av_2 = v_1$ podemos tomar a $b_1 = v_2$
- $Av_1 + Av_2 - Av_3 = A(v_1 + v_2 - v_3) = v_2 + v_1 - (v_1 + v_2) = \vec{0}$ podemos tomar a $b_3 = v_1 + v_2 - v_3$.

Luego una matriz B posible es $[v_2 \quad v_1 \quad v_1 + v_2 - v_3]$.

b) Como el sistema $Ax = \vec{0}$ tiene solución distinta de la trivial, las columnas de A son linealmente dependientes, por lo cual a lo más A tiene dos columnas linealmente independientes (o su FE solo dos columnas pivote), luego las columnas de A no pueden generar $\mathbb{R}^3$.

Puntaje:

- 1 pto por encontrar cada columna de B. (3 ptos)
- 2 ptos por argumentar que las columnas de A son linealmente dependientes. (o solo dos columnas pivote)
- 1 pto por justificar que las columnas de A no pueden generar $\mathbb{R}^3$.

4. Sea A una matriz con forma escalonada $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y tal que $A \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Determine la solución general del sistema $Ax = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Solución.

Observe que de la FE de la matriz A tenemos que la solución del sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ es el conjunto

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

por otra parte, de las propiedades de la multiplicación de matriz por vector tenemos que

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

obteniendo que el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema planteado, por lo tanto la solución general de dicho sistema es:

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Puntaje:

- 2 ptos por determinar la solución del sistema homogéneo.
- 2 ptos por determinar una solución particular.
- 2 ptos por determinar la solución general del sistema.

Continúa en la siguiente página.

5. Describa "en forma de conjunto generado" el conjunto

$$B = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b \quad \text{tiene infinitas soluciones} \right\}$$

Justifique su respuesta.

Solución.

- (1° solución)
  Como el conjunto $\{b \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A, tenemos que

$$\left\{ b \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b \quad \text{tiene solución} \right\} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

  Como el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es LD, ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  tenemos que el sistema en caso de ser consistente siempre tendrá infinitas soluciones. Luego

$$B = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

  Puntaje:

  - 2 ptos por argumentar que $\{b \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.
  - 2 ptos por argumentar que las columnas de la matriz son LD.
  - 2 ptos por concluir que el sistema en caso de ser consistente siempre tendrá infinitas soluciones.

- (2° solución)

  Sea $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ -1 & 1 & 0 & b_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & -b_1 + 2b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

  Para que el sistema tenga consistencia es necesario que $-b_1 + 2b_2 + b_3 = 0$, como la matriz de coeficientes tiene solo dos pivotes el sistema siempre tendrá infinitas soluciones. luego

$$B = Gen\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Puntaje:

- 2 ptos por argumentar que una condición necesaria para que el sistema sea consistente es que $-b_1 + 2b_2 + b_3 = 0$.
- 2 ptos por argumentar que como la matriz de coeficientes tiene solo dos pivotes el sistema siempre tendrá infinitas soluciones
- 2 ptos por concluir de manera correcta el conjunto que genera a B.

6. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$. Determine la matriz estándar de T.

Solución.

Como

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\right)$$

tenemos que

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=T\left(\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(T\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}-T\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

tenemos que

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=T\left(\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(T\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}-T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

y

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

Luego

$$[T]=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&5\end{pmatrix}.$$

Puntaje:

- 2 ptos por determinar cada columna de $[T]$

7. Sea $a \in \mathbb{R}$ y T una transformación lineal cuya matriz estándar está dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) [2 ptos] Decida para qué valor(es) de a la transformación T es inyectiva.

b) [4 ptos] Para los valores encontrados en a). Determine la fórmula de la transformación inversa.

Solución.

a) Para que sea inyectiva toda forma escalonada de la matriz estandar debe tener tres pivotes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & a \\ 0 & 0 & \frac{a}{5} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto a debe ser distinto de 0.

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & a & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{5} & -\frac{4}{10} & \frac{1}{5} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} & \frac{5}{a} \end{array}\right).$$

Entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} & \frac{5}{a} \end{pmatrix}$

Luego

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} & \frac{5}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Puntaje:

- 1 pto por por argumentar que para que sea inyectiva toda forma escalonada de la matriz estandar debe tener tres pivotes.
- 1 pto por determinar que $a \neq 0$.
- 0.7 pto por mostrar la matriz ampliada que resuelve el problema.
- 1 pto por determinar cada columna de A^{-1} correctamente. (3 ptos total)
- 0.3 pto por mostrar $T^{-}1$.
- (observación) si se toma un valor en particualr de $a \neq 0$ y se encuentra correctamente la fórmula de T^{-1} asignar 1pto.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas demúestrelas y si son falsas dé un contraejemplo.

   a) Si A es una matriz de 2×3, entonces la transformación $T : x \to Ax$ no puede ser sobreyectiva.

   b) La suma de dos matrices de 2×2 invertibles es invertible.

   c) Si A es una matriz de $n \times m$ con columnas linealmente independientes y $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ entonces $P \cdot P^T = P$

Solución.

a) Falso.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T : x \to Ax$ es sobreyectiva, ya que su FE tien dos pivotes.

b) Falso.

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ambas matrices son invertibles, ya que sus columnas son LI , pero la matriz $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es invertible.

c) Verdadero

$$P \cdot P^T = A(A^TA)^{-1}A^T \cdot \left(A(A^TA)^{-1}A^T\right)^T = A(A^TA)^{-1}A^TA\left((A^TA)^{-1}\right)^T A^T$$
$$A(A^TA)^{-1}(A^TA)\left((A^TA)^T\right)^{-1}A^T = AI\left(A^TA\right)^{-1}A^T = A\left(A^TA\right)^{-1}A^T = P$$

Puntaje:

- 2 ptos por dar contraejemplo en a) y b)
- 2 ptos por demostrar de manera correcta c) (por ningún motivo se puede separar $(A^TA)^{-1}$)