1. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to M_{2\times 2}$ una transformación lineal. Si $T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(-1) \\ 0 & p(1) \end{bmatrix}$, entonces T es inyectiva.

Sol: Si T inyectiva

$p(t), q(t) \in \mathbb{P}_2$

$T(p(t)) = T(q(t)) \Rightarrow p(t) = q(t)$?

$\Rightarrow \begin{bmatrix} p(1) & p(-1) \\ 0 & p(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(1) & q(-1) \\ 0 & q(1) \end{bmatrix}$

$\Rightarrow p(1) = q(1)$, $p(-1) = q(-1)$

definimos

$p(t) = 1 \Rightarrow p(1) = q(1) = 1$

$q(t) = 2 - t^2 \quad p(-1) = q(-1) = 1$

$\therefore T(p(t)) = T(q(t))$

Pero $p \neq q$

$\Rightarrow T$ no es inyectiva.

2. Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2\}$ bases de los espacios vectoriales V y W respectivamente. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal tal que $T(v_1) = 2w_1 - 5w_2$, $T(v_2) = w_1 + w_2$ y $T(v_3) = w_1 + 3w_2$, entonces para todo $v \in V$, el vector coordenado de $T(v)$ con respecto a B_2 es

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} [v]_{B_1}.$$

Sol: Sea $v \in V$, $v = aV_1 + bV_2 + cV_3$

$$T(v) = T(aV_1 + bV_2 + cV_3)$$

$$= aT(V_1) + bT(V_2) + cT(V_3)$$

$$= a(2w_1 - 5w_2) + b(w_1 + w_2) + c(w_1 + 3w_2)$$

$$= w_1(2a + b + c) + w_2(-5a + b + 3c)$$

$$[T(v)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2a + b + c \\ -5a + b + 3c \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} [v]_{B_1}$$

Verdadero.

3. Sean U, V y W espacios vectoriales. Sea $T : U \to V$ y $L : V \to W$ transformaciones lineales. Si $\text{Im}(T) = \text{Nul}(L)$ y T es sobre, entonces $\text{Im}(L) = \{\vec{0}_W\}$.

Si: T es Sobre

$$\Rightarrow \text{Im}(T) = V$$

$$\text{Im}(T) = \text{Nul}(L)$$

$$\Rightarrow \text{Nul}(L) = V$$

Para todo $v \in V$

$$L(v) = \vec{0}_W$$

$$\text{Im}(L) = \{\vec{0}_W\}$$

4. Si $T : M_{3\times 3} \to \mathbb{P}_3$ es una transformación lineal, entonces T no puede ser inyectiva.

Teorema 6.15. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$\text{Dim Nul}(T) + \text{Dim Im}(T) = \text{Dim}(V).$$

Sol: $\dim(M_{3\times 3}) = 9$

$$\dim(M_{3\times 3}) = \dim \text{Nul}(T) + \dim \text{Im}(T)$$

$$9 = \dim \text{Nul}(T) + \dim \text{Im}(T)$$

Pero $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{P}_3$

$$\Rightarrow \dim \text{Im}(T) \leq \dim(\mathbb{P}_3)$$

$$\dim \text{Im}(T) \leq 4$$

$$\dim \text{Nul}(T) + \dim \text{Im}(T) \leq \dim \text{Nul}(T) + 4$$

$$\boxed{9 \leq \dim(\text{Nul}(T) + 4}$$

$$5 \leq \dim(\text{Nul}(T)$$

$\Rightarrow$ T no es inyectiva

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$. SI $a = 2$ y $b = 3$, entonces A tiene dos vectores propios.

Por lo menos

Sol $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$

$\Rightarrow 2$ es el único Valor propio

$Nul(A - 2I)$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x \in Gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un vector propio

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un vector propio

$\Rightarrow A$ tiene por lo menos 2 Vectores propios.

6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$. SI $a = 2$ y $b = 3$, entonces A tiene dos vectores propios L.I.

Sol: (Continuación de la anterior)

$\Rightarrow Nul(A - 2I)$

$\Rightarrow x \in Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$\therefore$ Sólo podemos asegurar 1 vector LI.

$\longrightarrow$ Falso

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ a & b \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. SI $a = 2$ y $b = 0$, entonces A tiene dos vectores propios L.I.

Sol: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$

2 es el único Valor propio

$Nul(A - 2I)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Nul(A - 2I) = \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ son Vectores propios LI.