Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2022

Álgebra Lineal - MAT1203
Guía 9

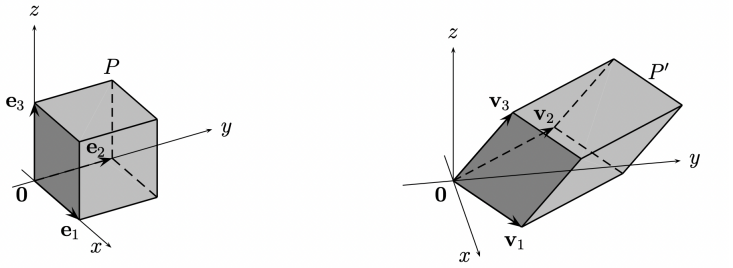
Problemas mínimos

1. Sea $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
   (a) Demuestre que el conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Encuentre la matriz de cambio de las coordenadas de $\mathcal{B}$ a la base estándar.
   (c) Escriba la ecuación que relaciona $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^3$ con $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.
   (d) Encuentre $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, para la $\mathbf{x}$ dada anteriormente.
2. El conjunto $\mathcal{B} = \{1 + t, 1 + t^2, t + t^2\}$ es una base para $\mathbb{P}_2$. Encuentre el vector de coordenadas de $\mathbf{p}(t) = 6 + 3t - t^2$ en relación con $\mathcal{B}$.

Problemas adicionales

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix}$. Encuentre una factorización de la forma $A = LU$.
4. Suponga que $A = BU$ con
$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}$$
Calcule $\det(3A)$.
5. Utilizando el método de Cramer determine la segunda columna de la inversa de
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$
6. Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} 2s + 4t \\ 2s \\ 2s - 3t \\ 5t \end{bmatrix}$, donde s y t son números reales. Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

7. Sea P el paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ que está determinado por los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ y sea P' el paralelepípedo que está determinado por los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Véase la figura.



   (a) Determine una matriz A que representa la transformación lineal tal que $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1$, $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2$ y $T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_3$.

   (b) Suponga que $T(P) = P'$. Determine el volumen del paralelepípedo P'.

8. Determine una matriz A de manera que el espacio columna de A sea

$$\operatorname{Col} A = \left\{ \begin{bmatrix} b-c \\ 2b-5d \\ b-3c+3d \\ -c+d \end{bmatrix} \mid b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

9. Sea $M_{2\times 2}$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2, y se define $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ mediante $T(A) = BA$, donde $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Demuestre que T es una transformación lineal.

   (b) Encuentre el núcleo de la transformación lineal T.

Soluciones

- Problemas 1 y 2: Lay, Página 224, Solución a los problemas de práctica.
- Problemas 3 a 9: Ver Pauta de interrogación 2 del curso Álgebra Lineal Primer semestre 2022.