Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2022

Álgebra Lineal - MAT1203
Guía 10

Problemas mínimos

1. Determine la dimensión del espacio columna y del núcleo de la matriz A cuya como forma escalonada es $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si son verdaderas demuéstrelo en general. Si es falsa muestre un contraejemplo.
   (a) Si existe un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ que genera a V, entonces $\dim V \leq p$.
   (b) Si cada conjunto de p elementos en V no genera a V, entonces $\dim V > p$.
   (c) Si $p \geq 2$ y $\dim V = p$, entonces cada conjunto de $p-1$ vectores distintos de cero es linealmente independiente.
   (d) Si A es una matriz de $n \times m$, entonces $m + \text{Dim}\left(\text{Ker}\left(A^T\right)\right) = n + \text{Dim}(\text{Ker}(A))$.
   (e) Si $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal, entonces T no puede ser inyectiva.

3. Sean $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bases para un espacio vectorial V, y suponga que $\mathbf{a}_1 = 4\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, y $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$.
   (a) Encuentre la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.
   (b) Determine $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ para $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$

Problemas adicionales

4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
   (a) Si existe un conjunto l.i. $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ en V, entonces $\dim V \geq p$.
   (b) Si $\dim V = p$, entonces existe un conjunto generador de $p+1$ vectores en V.
   (c) Si existe un conjunto l. d. $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ en V, entonces $\dim V \leq p$.
   (d) Sea A una matriz de 3×4. El rango de A es 3 si y sólo si $\text{Ker}\left(A^T\right) = \{\overrightarrow{0}\}$.
   (e) Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Entonces T no puede ser sobreyectiva.

5. En $\mathbb{P}_2$, encuentre la matriz de cambio de coordenadas de la base
$$\mathcal{B} = \left\{1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2\right\}$$
a la base estándar de $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$. Luego, encuentre el vector de $\mathcal{B}$-coordenadas para $-1 + 2t$

Soluciones

- Problema 1: dim Nul (A)=3, dim Col (A)=2.
- Problema 2: (a)V, (b)V, (c)F, (d)V, (e)V.
- Problema 3: Lay, página A36, Sección 4.7, Ejercicio 5.
- Problema 4: (a)V, (b)V, (c)F, (d)V, (e)F,
- Problema 5: Lay, página A36, Sección 4.7, Ejercicio 13.