Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2025

Álgebra Lineal - MAT1203
Ayudantía 14

1. Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Compruebe que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A. Después diagonalice A ortogonalmente.

Solución:
Para comprobar si v_1 y v_2 son vectores propios de la matriz A debemos recordar la ecuación:

$$Av = \lambda v$$

Para v_1 se tiene que: $Av_1 = \lambda_1 v_1$ y esto queda como:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al resolver queda como:

$$\begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De esta manera, rapidamente se puede observar que la ecuación se cumple para $\lambda_1 = 10$, por lo que v_1 es vector propio de A para el valor propio 10.

Luego, de la misma forma para v_2 se tiene que $Av_2 = \lambda_2 v_2$ y esto queda como:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver queda como:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera, se demuestra que con $\lambda_2 = 1$ el vector v_2 es efectivamente un vector propio de la matriz A con valor propio = 1.
Ahora debemos diagonalizar ortogonalmente la matriz A. Para ello, necesitamos llegar a la forma $A = PDP^T$ con P una matriz de los vectores propios ortonormalizados y la

matriz D diagonal de los valores propios.

Ya tenemos 2 vectores propios, sin embargo ya que la matriz A es de $3x3$ necesitamos un vector propio más para formar P. Estos los podemos buscar de 2 formas: 1) Obteniendo el polinomio Caracteristico de la matriz $Det(A - \lambda I) = 0$ y despejar las raices (ya tenemos 10 y 1). 2) Ya que la matriz es simetrica, por el teorema espectral sabemos que los vectores propios son ortogonales entre si, por lo que podemos hacer un sistema de ecuaciones.
Para estos ejercicios recomiendo la alternativa numero 2. Desarrollamos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \text{ y también } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2 \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación tenemos:

$$-2x_1 - 2x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 4x_1$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

De esta manera encontramos $v_3 = [1, -1, 4]$, ahora, utilizando el mismo sistema que para v_1 y v_2 podemos comprobar que efectivamente es un vector propio y además encontrar el valor propio asociado tal que:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Rapidamente, observamos que $\lambda_3 = 1$. Por ende ya tenemos 3 valores propios y 3 vectores propios Linealmente independientes y podemos diagonalizar la matriz A.
Ya que estamos diagonalizando ortogonalmente, debemos normalizar los vectores propios tal que:

$$e_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{1+1+0}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \frac{1}{\sqrt{1+1+16}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$P = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & 4/\sqrt{18} \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } P^T = \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \end{bmatrix}$$

2. Considere la forma cuadrática $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$.

   (a) Clasifique la forma cuadrática Q. Para clasificar la forma cuadratica de Q debemos obtener sus valores propios. Recordando la forma cuadratica como:

   $$Q(x) = x^T Ax$$

   Podemos ver que se puede escribir como:

   $$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3x_1 & -2x_2 \\ -2x_1 & 3x_2 \end{bmatrix} \text{ entonces } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

   Luego, los valores propios de la matriz se obtienen como:

   $$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = 0$$

   $$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \rightarrow (\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0$$

   Entonces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$. Ya que ambos valores propios son positivos, la forma de Q es definida positiva.

   (b) Realice un cambio de variable que elimine los productos cruzados en Q.

   Para el cambio de variable se tiene la forma $x = Py$ o también $y = P^{-1}x$ donde P es formada por los vectores propios normalizados.
   Como sabemos, la forma diagonalizada de A es: $A = PDP^T$, y entonces $P^TAP = D$
   Luego si reemplazamos el cambio de variable en la forma cuadratica obtenemos:

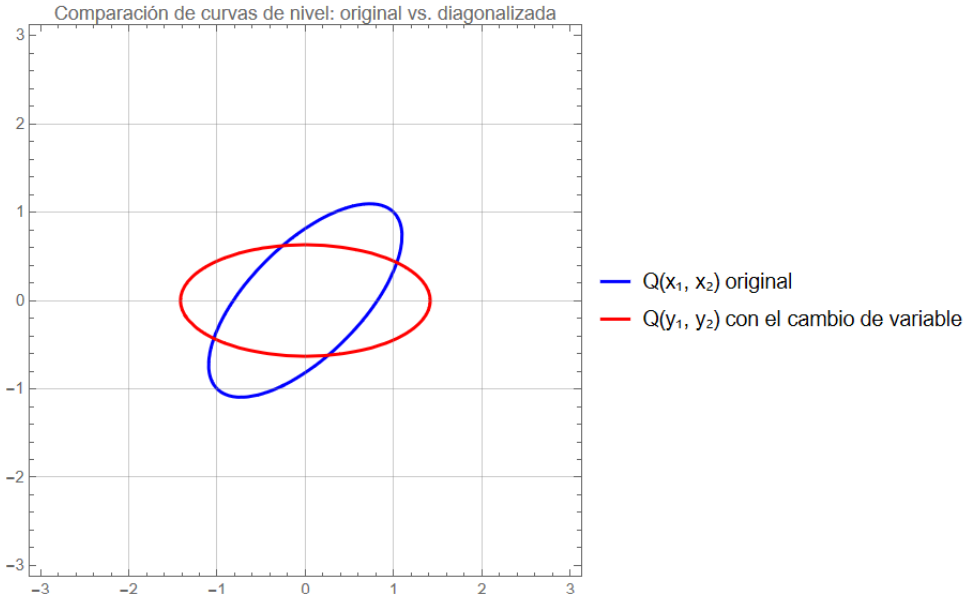
   $$Q(x) = (Py)^T \cdot A \cdot (Py) \rightarrow Q(x) = y^T P^T APy$$

   Con lo que habiamos escrito antes se tiene entonces que: $Q(x) = y^T Dy$. Si desarrollamos esto con los valores:

   $$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightarrow y_1^2 + 5y_2^2$$

   De esta forma, eliminamos el producto cruzado de la forma cuadratica, haciendo que el desarrollo sea mucho mas facil.

   (c) Grafique $Q(x_1, x_2) = 2$.
   Utilizando Wolfram se puede graficar la forma cuadratica. Además podemos colocar también el gráfico de la forma cuadratica una vez cambiada la variable:



3. Determine si es verdadero o falso:

   (a) Las matrices simétricas sólo tienen valores propios reales.
   Falso. La matriz simetrica:

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

   Tiene como polinomio caracteristico: $\lambda^2 + 1 = 0$ siendo sus raices $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. (¡OJO! Si nos dicen que la matriz solo esta compuesta por valores reales entonces el enunciado es verdadero por el teorema espectral)

   (b) Si $A^T = A$ y si los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ satisfacen $A\mathbf{u} = 3\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v} = 4\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
   Utilizando $Av = \lambda v$ y considerando que la matriz es simetrica, entonces se puede realizar el siguiente desarrollo multiplicando v^T a $Au = \lambda_1 u$ tal que:

$$v^T(Au) = v^T(\lambda_1 u) \rightarrow v^T(Au) = \lambda_1(v^T u)$$

   Luego usando $A^T = A$ se tiene:

$$(Av)^T = v^T A$$

$$v^T Au \rightarrow (Av)^T u = (\lambda_2 v)^T u \rightarrow v^T Au = \lambda_2(v^T u)$$

   Ya que llegamos 2 igualdades las podemos igualar como:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (v^T u) = 0$$

   Luego como $3 - 4$ no puede ser 0, entonces $u^T v = 0$, lo cual es la definición de ortogonalidad. La afirmación es verdadera, también justificada por el teorema espectral.

   (c) Todas las matrices simétricas se pueden diagonalizar.
   Si partimos asumiendo que la afirmación es falsa, estariamos diciendo que una matriz simetrica **NO** tiene vectores propios linealmente independientes (ya que para diagonalizar necesitamos n vectores propios L.I). Sin embargo como demostramos en el inciso b) y el ejercicio 1, los vectores propios de una matriz simetrica son siempre ortogonaless entre si. Por ende la afirmación no puede ser falsa. Esto se confirma con el teorema espectral.

4. Suponga que A es invertible y diagonalizable ortogonalmente. Explique por qué A^{-1} también es diagonalizable ortogonalmente.

   Si A es diagonalizable ortogonalmente entonces $A = PDP^T$ con $P^T = P^{-1}$ debidoa que son ortonormales. Si le aplicamos la inversa a la primera ecuación se obtiene:

   $$A^{-1} = (PDT^T)^{-1}$$

   al descomponer se obtiene:

   $$A^{-1} = (P^T)^{-1}D^{-1}P^{-1}$$

   Luego con las propiedades descritas anteriormente y $(P^{-1})^{-1} = P$ se tiene

   $$A^{-1} = PD^{-1}P^T$$

   De esta manera, queda demostrado que A^{-1} también es diagonalizable ortogonalmente.