Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre 2025

Algebra Lineal - MAT1203
Ayudantía 12

Problema 1:

Para que un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ sea ortogonal debe cumplirse que cada par de vectores distintos en el conjunto es ortogonal. En otras palabras todos los pares de vectores deben dar cero en su producto interno. Por lo que simplemente calcularemos los productos internos.

a)

Tenemos

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} \right\} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= (-1) \cdot 5 + 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 = -5 + 8 - 3 = 0, \\ v_1 \cdot v_3 &= (-1) \cdot 3 + 4 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-7) = -3 - 16 + 21 = 2, \\ v_2 \cdot v_3 &= 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-7) = 15 - 8 - 7 = 0. \end{aligned}$$

Como no todos cumplen la condición se tiene que este conjunto no es ortogonal.

b)

Tenemos

$$\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \{w_1,\ w_2,\ w_3\}$$

Entonces se tiene

$$w_1 \cdot w_2 = 5 \cdot (-4) + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 8 = -20 - 4 + 24 = 0,$$
$$w_1 \cdot w_3 = 5 \cdot 3 + (-4) \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) = 15 - 12 - 3 = 0,$$
$$w_2 \cdot w_3 = (-4) \cdot 3 + 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 5 + 8 \cdot (-1) = -12 + 3 - 15 - 8 = -32.$$

Como no todos cumplen la condición se tiene que este conjunto tampoco es ortogonal.

Problema 2:

Como tenemos el conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\},$$

que esta compuesto por tres vectores en $\mathbb{R}^3$, simplemente hay que ver que son linealmente independientes para que sea base de $\mathbb{R}^3$. Y por teorema sabemos que si un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^n$, entonces este es linealmente independiente y una base del subespacio generado por este. Por lo que solo hay que ver si este conjunto es ortogonal.

$$v_1 \cdot v_2 = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = -1 + 1 = 0,$$
$$v_1 \cdot v_3 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 2 - 2 = 0,$$
$$v_2 \cdot v_3 = (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -2 + 4 - 2 = 0.$$

Como vemos se cumple la condición de ortogonalidad, por lo tanto es un conjunto linealmente independiente y al ser tres vectores en $\mathbb{R}^3$ es base de esta misma.

Ahora queremos escribir el vector $\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, que llamaremos "$y$", como combinación lineal de los elementos de la base. Para ello usaremos el teorema de la descomposición ortogonal. Este nos dice que un vector cualquiera "y" en $\mathbb{R}^n$ se puede descomponer usando una base ortogonal $\{u_1, \cdots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$y = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\ u_1 + \cdots + \frac{y \cdot u_n}{u_n \cdot u_n} u_n.$$

Por lo tanto en nuestro caso se tendrá que

$$\begin{aligned}
\frac{y \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} &= \frac{8+3}{1+1} = \frac{11}{2}, \\
\frac{y \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} &= \frac{-8-16+3}{1+16+1} = \frac{-21}{18} = -\frac{7}{6}, \\
\frac{y \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} &= \frac{16-4-6}{4+1+4} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Y finalmente conseguimos

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{11}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{7}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Problema 3:

Para resolver este problema usaremos el Teorema que dice: Sea A una matriz de $m \times n$. El complemento ortogonal del espacio fila de A es el espacio nulo de A.
Por lo tanto armaremos una matriz M cuyo espacio de fila sea W y calcularemos su espacio nulo.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calculando el nulo de M se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0 \\
-x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies 8x_2 - 6x_3 &= 0 \\
\implies x_3 &= \frac{4}{3}x_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies x_1 + 4x_2 - 3\left(\frac{4}{3}x_2\right) &= 0 \\
\implies x_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto tendremos la solución con una variable libre de

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4/3 \end{bmatrix} x_2$$

Por lo que es espacio nulo de M es

$$\text{Nul}(M) = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4/3 \end{bmatrix} \right\} = W^{\perp},$$

que por teorema es el complemento ortogonal de W.

Problema 4:

Tenemos que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que se cumple

$$W \cap W^{\perp} \neq \{0\}.$$

Esto implica que debe de existir como mínimo un vector no nulo que existe en ambos subespacios W y $W^{\perp}$. Llamemos a este vector w. Ahora, como sabemos que todos los vectores que viven en W son perpendiculares a todos lo que viven en $W^{\perp}$ se debe cumplir que todas las combinaciones de productos internos son 0. Como w existe en ambos subespacios, calcularemos el producto interno con si mismo,

$$w \cdot w = |w|^2 \neq 0.$$

Como vemos encontramos una combinación de vectores entre ambos subespacios que no cumple la condición de ortogonalidad. Por lo que por contradicción se debe de cumplir si o si que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ para que se cumpla siempre la ortogonalidad.