PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Ayudantía 1 - MAT1203

1. Considere los vectores $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine $u + 3v$.

   (b) Determine $u \cdot v$.

   (c) Determine un vector con la misma dirección de u pero de norma 3.

   (d) Determine el ángulo entre u y v.

   Solución:

   a)
   $$u + 3v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 3 \cdot 2 \\ 2 + 3 \cdot 0 \\ -3 + 3 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

   b)
   $$u \cdot v = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) = 5$$

   c) El vector que buscamos es $\frac{3}{||u||} u$. Calculamos primero la norma de u:
   $$||u|| = \left|\left| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right|\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$
   Entonces:
   $$\frac{3}{||u||} u = \frac{3}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{6}{\sqrt{14}} \\ \frac{-9}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$

   d) Usamos que:
   $$u \cdot v = ||u||\ ||v|| \cos\theta$$
   Buscamos θ. Ya conocemos $u \cdot v$ y $|u|$ por (b) y (c), calculamos $|v|$:
   $$||v|| = \left|\left| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right|\right| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$
   Ahora manipulando la identidad original tenemos que:
   $$\theta = \arccos \frac{u \cdot v}{||u||\ ||v||} = \arccos \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{5}} = \arccos \sqrt{\frac{5}{14}} \approx 53,3$$

FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

2. Sean $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo y $s \in \mathbb{R}$ fijos. Sea $\mathbb{H}$ el hiperplano definido por la ecuación normal $\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = s\}$.

   a) Encuentre el valor $t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{y} = t\mathbf{n}$ pertenezca a $\mathbb{H}$.

   Solución:
   Se tiene que $\mathbf{y} = t\mathbf{n}$ pertenece a $\mathbb{H}$ si y solo si $\mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = s$. Pero $\mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = t\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = t\|\mathbf{n}\|^2$. Igualando y despejando se obtiene $t = s/\|\mathbf{n}\|^2$.

   b) Verifique que para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ el vector $\mathbf{z} = (\mathbf{x} - \mathbf{y})$, con $\mathbf{y}$ dado por el inciso anterior, es ortogonal a $\mathbf{n}$ y por lo tanto es ortogonal a $\mathbf{y}$.

   Solución:
   Como $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertenecesn a $\mathbb{H}$ entonces $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = s$. Luego

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = s - s = 0$$

   y $\mathbf{z}$ es ortogonal a $\mathbf{n}$. También $\mathbf{z}$ es ortogonal a cualquier escalarización de $\mathbf{n}$, en particular $\mathbf{z}$ es ortogonal a $\mathbf{y} = t\mathbf{n}$.

3. Determine una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $(4, 3, -1)$ y $(1, 2, 3)$.

   Solución:

   Llamemos $A = (4, 3, -1)$ y $B = (1, 2, 3)$. Para la ecuación vectorial de la recta necesitamos un punto perteneciente a la recta (vector posición) y un vector director. Para el punto podemos usar A o B, y para el vector director podemos usar $\overline{BA} = (A - B)$ o $\overline{AB} = (B - A)$. Una opción es:

$$L_1 : A + (A - B)t = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4-1 \\ 3-2 \\ -1-3 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} t$$

4. Determine la intersección de los planos

$$5x - 2y - 2z = 1, \;\; 4x + y + z = 6$$

   Solución:

   Notemos que es posible despejar x si sumamos las ecuaciones de forma inteligente. Podemos tomar la primera ecuación y sumarle 2 veces la segunda, obtenemos:

$$5x + 8x - 2y + 2y - 2z + 2z = 1 + 12$$

$$13x = 13$$

$$x = 1$$

   Reemplazando en la segunda ecuación tenemos:

$$y + z = 6 - 4 = 2$$

$$y = 2 - z$$

Entonces podemos escribir la ecuación de la recta en terminos de z:

$$L_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2-z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z$$

(También podríamos haber escrito en terminos de y, también sería correcto).

5. Considere las rectas

$$L_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ y } L_2 := \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}) : s \in \mathbb{R} \right\}$$

   a) Determine el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2.

   b) Determine una ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

Solución:

Para encontrar la intersección, igualamos las ecuaciones de recta:

$$\begin{bmatrix} 1+t \\ 3-t \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+s \\ 2+s \\ 5-s \end{bmatrix}$$

Aquí podemos despejar valores de t y s usando el metodo que querramos. Notamos que la última ecuación nos dice que $2 = 5 - s$, por lo que $s = 3$. Ahora podemos simplemente reemplazar $s = 3$ en la ecuación de la recta L_2, obteniendo que el punto de intersección p es:

$$p = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Las dos ecuaciones de recta nos entregan los vectores directores de forma "gratis", y podemos escojer como vector posición el de cualquiera de las dos rectas. Usamos, por ejemplo, el de la recta L_1. Entonces la ecuación sería:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} s$$