PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 32: Conjuntos ortogonales

1. Determine qué conjuntos de vectores son ortogonales

   a) $\begin{bmatrix}-1\\4\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-4\\-7\end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix}2\\-5\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-2\\6\end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix}5\\-4\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\1\\-3\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\5\\-1\end{bmatrix}$

2. Demuestre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ o $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ son una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Después exprese $\mathbf{x}$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}$.

   a) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}-6\\3\end{bmatrix}$

   b) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}3\\-3\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}5\\-3\\1\end{bmatrix}$

3. Calcule la proyección ortogonal de $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ sobre la recta que pasa por $\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ y por el origen.

4. Sean $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}$. Escriba $\mathbf{y}$ como la suma de un vector en Gen$\{\mathbf{u}\}$ y un vector ortogonal a $\mathbf{u}$.

5. Sean $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}-3\\9\end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. Calcule la distancia de $\mathbf{y}$ a la recta que pasa por $\mathbf{u}$ y el origen.

6. Determine cuáles conjuntos de vectores son ortonormales. Si un conjunto solamente es ortogonal, normalice los vectores para obtener un conjunto ortonormal.

a) $\left\{ \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{20} \\ 3/\sqrt{20} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{20} \\ -1/\sqrt{20} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$

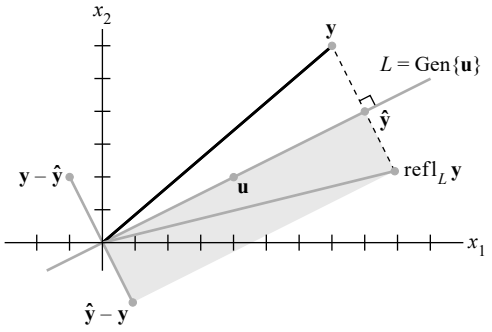
c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \right\}$

7. Dado $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$, sea $L = \text{Gen}\{\mathbf{u}\}$. Demuestre que el mapeo $\mathbf{x} \mapsto \text{proy}_L\mathbf{x}$ es una transformación lineal.

8. Dado $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$, sea $L = \text{Gen}\{\mathbf{u}\}$. Para $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$, la reflexión de $\mathbf{y}$ en L es el punto $\text{Refl}_L\mathbf{y}$ definido por

$$\text{refl}_L\mathbf{y} = 2 \cdot \text{proy}_L\mathbf{y} - \mathbf{y} \, .$$

Véase la figura, que indica que $\text{refl}_L\mathbf{y}$ es la suma de $\widehat{\mathbf{y}} = \text{proy}_L\mathbf{y}$ y $\widehat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$. Demuestre que el mapeo $\mathbf{y} \mapsto \text{refl}_L$ es una transformación lineal.



La reflexión de **y** en una recta que pasa por el origen.