Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2020

MAT1203 – Álgebra Lineal

Solución Interrogación N° 1

1. Dado el sistema

Forma 1.
$$\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 2 \\ ky+(k+1)z &=& (k+1) \\ k(k+1)z &=& k \end{array}$$

Forma 2.
$$\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 2 \\ x+2y+z &=& 3 \\ x+y+(k^2-5)z &=& k \end{array}$$

Forma 3.
$$\begin{array}{rcl} (k-2)x-2y &=& k \\ x+(k-3)y-z &=& 2 \\ x-2y+(k-3)z &=& 3 \end{array}$$

Forma 4.
$$\begin{array}{rcl} (k-2)x+y-z &=& -2 \\ -x+3y-z &=& 0 \\ x+y+z &=& -k \end{array}$$

Forma 5.
$$\begin{array}{rcl} x-y+(2k+1)z &=& 1 \\ ky+z &=& -1 \\ -y-kz &=& k+2 \end{array}$$

Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema tenga solución única, tenga infinitas soluciones, no tenga solución. Encuentre las soluciones para el caso en que el sistema tenga infinitas soluciones.

Solución.

- Forma 1. El sistema es equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & k & k+1 & k+1 \\ 0 & 0 & k(k+1) & k \end{bmatrix}$
  - Tiene solución única si $k \neq -1$ y $k \neq 0$.
  - Tiene infinitas soluciones si $k = 0$ y en este caso las soluciones son $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\alpha \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - No tiene soluciones si $k = -1$.
- Forma 2. El sistema es equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & (k-2)(k+2) & k-2 \end{bmatrix}$
  - Tiene solución única si $k \neq -2$ y $k \neq 2$.
  - Tiene infinitas soluciones si $k = 2$ y en este caso las soluciones son $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3\alpha \\ 1-2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

- No tiene soluciones si $k = -2$.

- Forma 3. El sistema es equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & -2 & k-3 & 3 \\ 0 & 2(k-3) & -(k-3)(k-2) & -2(k-3) \\ 0 & k-1 & -(k-2) & -1 \end{bmatrix}$.

  Si $k \neq 3$ el sistema es equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & -2 & k-3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}(k-2) & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(k-2)(k-3) & k-2 \end{bmatrix}$

  - Tiene solución única si $k \neq 3$ y $k \neq 2$.
  - Tiene infinitas soluciones si $k = 2$ o $k = 3$ y en este caso las soluciones son $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + 2 \\ \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha \end{bmatrix}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o bien $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + 1 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
  - No hay valores de k para los cuales el sistema no tenga soluciones.

- Forma 4. El sistema es equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{k}{4} \\ 0 & 0 & 1-k & \frac{3}{4}k^2 - \frac{5}{4}k - 2k \end{bmatrix}$
  - Tiene solución única si $k \neq 1$.
  - No hay valores de k para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones.
  - No tiene soluciones si $k = 1$.

- Forma 5. El sistema es equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2k+1 & 1 \\ 0 & 1 & k & -k-2 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & k^2+2k-1 \end{bmatrix}$
  - Tiene solución única si $k \neq 1$ y $k \neq -1$.
  - No hay valores de k para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones.
  - No tiene soluciones si $k = 1$ o $k = -1$.

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por obtener los valores de k de modo que el sistema tiene una única solución.
- 2 puntos por obtener los valores de k de modo que el sistema tenga infinitas soluciones.
- 2 puntos por obtener los valores de k de mod que el sistema no tenga soluciones.

2. Sea A una matriz de 4×4 cuyas columnas son los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4 la cual satisface

Forma 1. $2v_1 - v_2 - 3v_3 + 2v_4 = \vec{0}$.

Forma 2. $v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 = \vec{0}$.

Forma 3. $-5v_1 + 3v_2 - 2v_3 - 7v_4 = \vec{0}$.

Forma 4. $2v_1 - 5v_2 - 3v_3 + 2v_4 = \vec{0}$.

Forma 5. $7v_1 + 3v_2 - 5v_3 + v_4 = \vec{0}$.

Demuestre que A no es invertible y encuentre una matriz B no cero de 4×4 tal que AB es la matriz cero.

Solución. Notemos que

$$\text{Forma 1} \quad 2v_1 - v_2 - 3v_3 + 2v_4 = \vec{0} \Longleftrightarrow A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow Aw_1 = \vec{0}$$

$$\text{Forma 2} \quad v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 = \vec{0} \Longleftrightarrow A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow Aw_2 = \vec{0}$$

$$\text{Forma 3} \quad -5v_1 + 3v_2 - 2v_3 - 7v_4 = \vec{0} \Longleftrightarrow A \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow Aw_3 = \vec{0}$$

$$\text{Forma 4} \quad 2v_1 - 5v_2 - 3v_3 + 2v_4 = \vec{0} \Longleftrightarrow A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow Aw_4 = \vec{0}$$

$$\text{Forma 5} \quad 7v_1 + 3v_2 - 5v_3 + v_4 = \vec{0} \Longleftrightarrow A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow Aw_5 = \vec{0}$$

En cada uno de esto casos, esto implica que la ecuación $Ax = \vec{0}$ tiene una solución no trivial, luego la transformación $x \mapsto Ax$ no es inyectiva, lo que prueba que A no es invertible. Basta tomar, para cada Forma k, la matriz $B = [w_k \ \ w_k \ \ w_k \ \ w_k]$ con $k = 1, 2, 3, 4, 5$, entonces

$$AB = A[w_k \ \ w_k \ \ w_k \ \ w_k] = [Aw_k \ \ Aw_k \ \ Aw_k \ \ Aw_k] = [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]$$

Puntaje Pregunta 2.

- 1 puntos mostrar que la condición dada es equivalente a $Aw_k = \vec{0}$.
- 3 puntos por una justificación correcta de que A no es invertible.
- 2 puntos por determinar una matriz B que satisfaga lo pedido.

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

Forma 1. $T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\\alpha\end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

Forma 2. $T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\alpha\end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$

Forma 3. $T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\\alpha\end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-4\end{bmatrix}$

Forma 4. $T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\\alpha\end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix}$

Forma 5. $T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\\alpha\end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix}$

a) Determine la matriz A, tal que $T(x) = Ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

b) ¿Qué condiciones debe cumplir α para que esta transformación lineal sea uno a uno?.

c) ¿Qué condiciones debe cumplir α para que esta transformación lineal sea sobreyectiva?.

Solución.

Forma 1.

a) Se tiene que $A = \begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\1 & \alpha-1 & -2\end{bmatrix}$

b) Para que T sea uno a uno necesitamos que las columnas de la matriz A sean linealmente independientes, lo cual independiente de α nunca se cumple.

c) Para que T sea sobreyectiva necesitamos que las columnas de A generen a $\mathbb{R}^2$ (2 columnas pivote), lo que se cumple si $\alpha \neq -1$.

Forma 2.

a) $A = \begin{bmatrix}2 & -2 & -2\\2 & \alpha-2 & -2\end{bmatrix}$

b) Para que T sea uno a uno necesitamos que las columnas de la matriz A sean linealmente independientes, lo cual independiente de α nunca se cumple.

c) Para que T sea sobreyectiva necesitamos que las columnas de A generen a $\mathbb{R}^2$ (2 columnas pivote), lo que se cumple si $\alpha \neq 0$.

Forma 3.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & \alpha & 4 \end{bmatrix}$

b) Para que T sea uno a uno necesitamos que las columnas de la matriz A sean linealmente independientes, lo cual independiente de α nunca se cumple.

c) Para que T sea sobreyectiva necesitamos que las columnas de A generen a $\mathbb{R}^2$ (2 columnas pivote), lo que se cumple si $\alpha \neq 3$.

Forma 4.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -\alpha - 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) Para que T sea uno a uno necesitamos que las columnas de la matriz A sean linealmente independientes, lo cual independiente de α nunca se cumple.

c) Para que T sea sobreyectiva necesitamos que las columnas de A generen a $\mathbb{R}^2$ (2 columnas pivote), lo que siempre se cumple independiente del valor de α.

Forma 5.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -\alpha - 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) Para que T sea uno a uno necesitamos que las columnas de la matriz A sean linealmente independientes, lo cual independiente de α nunca se cumple.

c) Para que T sea sobreyectiva necesitamos que las columnas de A generen a $\mathbb{R}^2$ (2 columnas pivote), lo que se cumple si $\alpha \neq \frac{3}{2}$.

Puntaje Pregunta 3.

- 4 puntos por determinar la matriz A.
- 1 punto por determinar las condiciones sobre α para que la transformación lineal sea uno a uno.
- 1 punto por determinar las condiciones sobre α para que la transformación lineal sea sobreyectiva.