PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2022

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL

Clase 16: Determinantes

1. Calcule los determinantes mediante desarrollo por cofactores. En cada caso, seleccione una fila o columna que implique la menor cantidad de operaciones

$a)$ $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ $b)$ $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $c)$ $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

2. Calcule los determinantes de las matrices elementales dadas.

$a)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$ $b)$ $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $c)$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Escriba $5A$. ¿$\det(5A) = 5\det(A)$?

4. Encuentre los determinantes por reducción de filas a una forma escalonada

$a)$ $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$ $b)$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ $c)$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

5. Calcule los determinantes, sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7\,.$$

$a)$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$ $b)$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$ $c)$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

6. Use determinantes para saber si la matriz es invertible

$a)$ $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $b)$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

7. Utilice determinantes para saber si el conjunto de vectores es linealmente independiente.

$a)$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$ $b)$ $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$

8. Calcule $\det(B^5)$, donde $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

9. Sean A y P matrices cuadradas, con P invertible. Demuestre que $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$.

10. Sea U una matriz cuadrada tal que $U^TU = I$. Demuestre que $\det(U) = \pm 1$.

11. Sean A y B matrices de 3×3, con $\det(A) = 4$ y $\det(B) = -3$. Con base en propiedades de determinantes, calcule:

$a)$ $\det(AB)$ $b)$ $\det(5A)$ $c)$ $\det(B^T)$ $d)$ $\det(A^{-1})$ $e)$ $\det(A^3)$